Modellierung nicht-spiegelnder Reflexion von Platten mittels quasi-geführter Wellen

Daniel A. Kiefer Michael Ponschab

Lehrstuhl für Sensorik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg (FAU)
91052 Erlangen

17.08.2021 – DAGA 2021, Wien

Gefördert durch ein DEGA Young Scientist Grant.

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

Motivation: Lambwellen-basierte Durchflussmesser

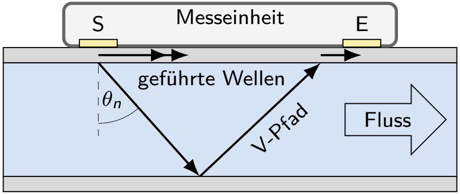


Abbildung: Geometrie eines Durchfluss-Messgerätes basierend auf geführten Wellen.

- geführte Wellen in der Rohrwand (z.B. Lambwellen)
  - $\rightarrow$ Dickenresonanzen
  - $\rightarrow$ Abstrahlung unter Winkel θ_n ("kritischer Winkel")
- Reflexion an gegenüberliegender Wand
  - $\rightarrow$ gelangt zum Empfänger (E)

Wie lässt sich die **Reflexion an der Rohrwand** beschreiben?

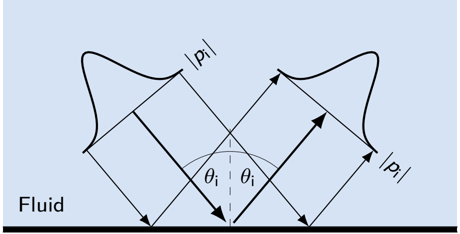
Inhalt

Lehrstuhl für Sensorik

ISE

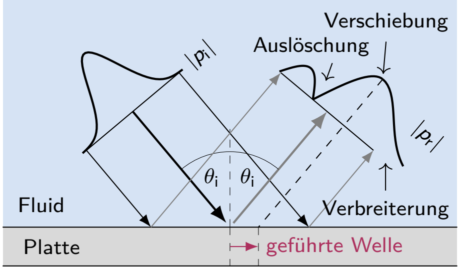
Spiegelnde vs. nicht-spiegelnde Reflexion

spiegelnd:



starre Oberfläche

nicht-spiegelnd:[1][2]



0 Δx: Schoch-Verschieb.

Nicht-spiegelnde Reflexion:

Einfall von Schall auf einen **Wellenleiter** unter dem kritischen Winkel $\theta_i = \theta_n$

[1] A. Schoch. "Seitliche Versetzung eines total reflektierten Strahls bei Ultraschallwellen". In: *Acta Acustica united with Acustica* 2.1 (1. Jan. 1952), S. 18–19

[2] H. L. Bertoni und T. Tamir. "Unified theory of Rayleigh-angle phenomena for acoustic beams at liquid-solid interfaces". In: *Applied physics* 2.4 (1. Okt. 1973), S. 157–172

Lambwellen: Geführte Wellen in einer freien Platte

- harmonischer, ebener Wellenansatz:
  $\mathbf{v}(x,y) = \mathbf{v}(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}$

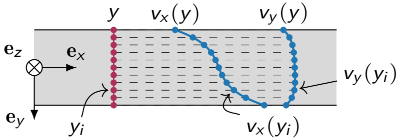


Abbildung: Stehende Welle über der Plattendicke

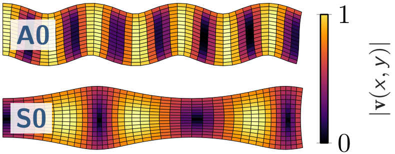


Abbildung: Ausbreitungsfähige Grundmoden:
A0: anti-symmetrische **S0**: symmetrische

- Eigenwertproblem für $\mathbf{v}(y) = [v_x(y), v_y(y)]^\top$
  $\rightarrow$ "Modale Lösungen":

  $\mathbf{v}_n(y)$ Teilchengeschwindigkeit
  $k_n(\omega)$ Wellenzahl
  $\theta_n(\omega)$ Abstrahlwinkel

Numerische Lösungsmethodik:

- nur Dickenrichtung y diskretisiert
- z.B. Spektrale Kollokation
  $\rightarrow$ diskrete Operatoren (Matrizen)

Lehrstuhl für Sensorik

Normalmodentheorie für Lambwellen

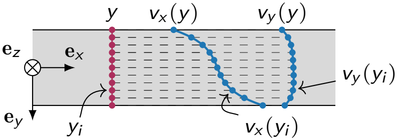


Abbildung: Lambwelle: Modenform

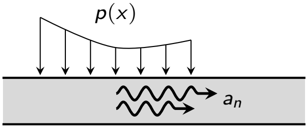


Abbildung: Druck auf Plattenoberfläche

- Eigenfunktionen $\mathbf{v}_n(y)$ ("Modenformen")
  - $\rightarrow$ erfüllen eine *Orthogonalitätsbeziehung*
  - $\rightarrow$ Normalmodentheorie [3]

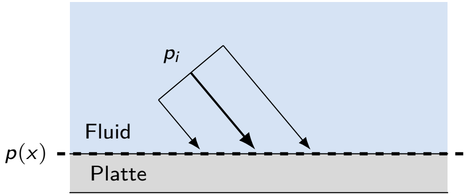
- Bestimme die "Wellenamplituden" $a_n(x)$ aus

$$\left[\frac{\partial}{\partial_x} - \mathrm{i}k_n\right] a_n(x) = \frac{v_{yn}^* p(x)}{4\overline{P}_n}$$

  - $\rightarrow$ $\overline{P}_n$: Leistungsfluss der Wellen
  - $\rightarrow$ v_{yn}^*: normale Teilchengeschw. an Plattenoberfläche.

[3] B. A. Auld. *Acoustic Fields and Waves in Solids 2*. 2nd. Bd. 2. 2 Bde. Malabar, Fla: Krieger Publishing Company, 1990. 878 S.

Anregung bei Schalleinfall



$$p(x) = 2p_{\mathrm{i}}(x) + p_{\mathrm{l}n}(x) \quad [4]$$

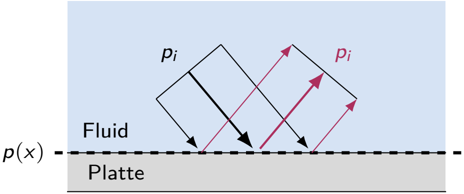
p_{i}: einfallender Druck
$=$ schallhart reflektierter Druck

$p_{\mathrm{l}n}$: abgestrahlter Druck
(von der geführten Welle).

- p_{i} ist vorgegeben $\rightarrow$ bekannt

[4] X. Jia. “Normal-mode theory of nonspecular phenomena for a finite-aperture ultrasonic beam reflected from layered media”. In: *Applied Physics Letters* 70.3 (20. Jan. 1997), S. 309–311

Anregung bei Schalleinfall



$$p(x) = 2p_{\mathrm{i}}(x) + p_{\mathrm{l}n}(x) \quad [4]$$

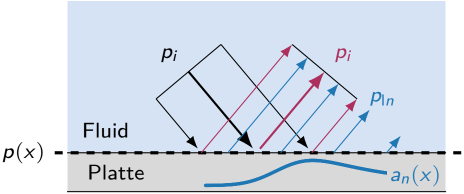
p_{i}: einfallender Druck
$=$ schallhart reflektierter Druck

$p_{\mathrm{l}n}$: abgestrahlter Druck
(von der geführten Welle).

- p_{i} ist vorgegeben $\rightarrow$ bekannt

[4] Jia, "Normal-mode theory of nonspecular phenomena for a finite-aperture ultrasonic beam reflected from layered media"

Anregung bei Schalleinfall



$$p(x) = 2p_\mathrm{i}(x) + p_{\mathrm{l}n}(x) \quad [4]$$

p_i: einfallender Druck
$=$ schallhart reflektierter Druck

$p_{\mathrm{l}n}$: abgestrahlter Druck
(von der geführten Welle).

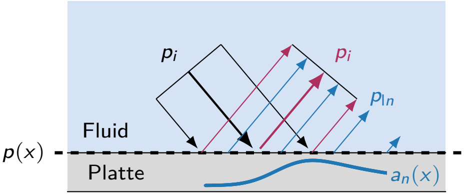
- p_i ist vorgegeben $\rightarrow$ bekannt

- **Aber:** Was ist $p_{\mathrm{l}n}$?
  $\rightarrow$ Aus Kontinuität von v_y an Grenzschicht:

$$p_{\mathrm{l}n}(x) = -\frac{Z_\mathrm{f}}{\cos\theta_n} v_{yn} a_n(x)$$

[4] Jia, "Normal-mode theory of nonspecular phenomena for a finite-aperture ultrasonic beam reflected from layered media"

Anregung bei Schalleinfall



$$p(x) = 2p_{\mathrm{i}}(x) + p_{\mathrm{l}n}(x) \quad [4]$$

p_{i}: einfallender Druck
= schallhart reflektierter Druck

$p_{\mathrm{l}n}$: abgestrahlter Druck
(von der geführten Welle).

- p_{i} ist vorgegeben $\rightarrow$ bekannt

- **Aber:** Was ist $p_{\mathrm{l}n}$?
  $\rightarrow$ Aus Kontinuität von v_y an Grenzschicht:

$$p_{\mathrm{l}n}(x) = -\frac{Z_{\mathrm{f}}}{\cos\theta_n} v_{yn} a_n(x)$$

- Somit ist der Anregungsterm:

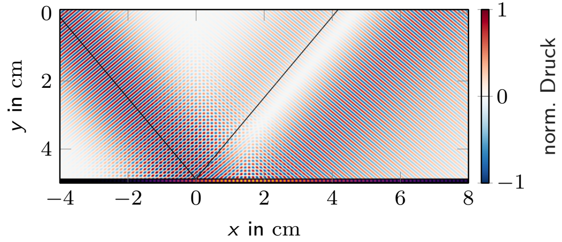
$$\frac{v_{yn}^* p(x)}{4\overline{P}_n} = \frac{v_{yn}^* p_{\mathrm{i}}(x)}{2\overline{P}_n} - \underbrace{\frac{Z_{\mathrm{f}} |v_{yn}|^2}{4\overline{P}_n \cos\theta_n}}_{\alpha_n} a_n(x)$$

Bestimmungsgleichung

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}(k_n + \mathrm{i}\alpha_n)\right] a_n(x) = \frac{v_{yn}^* p_{\mathrm{i}}(x)}{2\overline{P}_n}$$

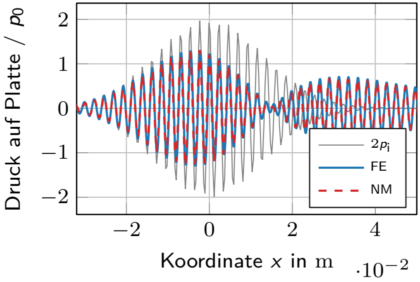
[4] Jia, "Normal-mode theory of nonspecular phenomena for a finite-aperture ultrasonic beam reflected from layered media"

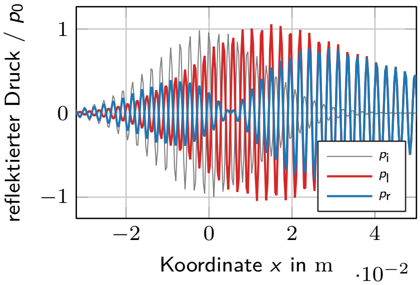
Beispiel: Stahlplatte mit Wasser



hoher Impedanzunterschied

- A0 Mode bei $1\,\mathrm{MHz\,mm}$
- Strahlbreite: $\alpha_n w = 0.4$
  $\rightarrow$ $w = 1{,}3\,\mathrm{cm}$





Berechnung des reflektierten Wellenfeldes

Bestimmungsgleichung

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}(k_n + \mathrm{i}\alpha_n)\right] a_n(x) = \frac{v_{yn}^* p_\mathrm{i}(x)}{2\overline{P}_n}$$

Normalmodentheorie (NM):

1. Geführte Wellen $(k_n, \mathbf{v}_n)$ berechnen
   $\rightarrow$ Liefert auch $\overline{P}_n$ und θ_n
2. Bestimmungsgl. $1\times$ integrieren

Bemerkungen:

- Zwei **ein-dimensionale** Probleme:
- p_i und p_r separat bestimmt

Finite Elemente (FE):

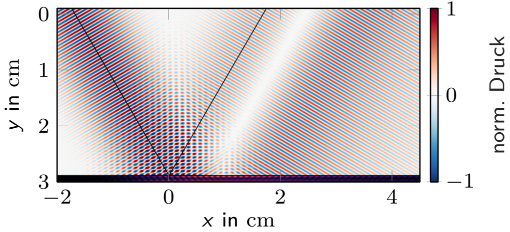
1. Geführte Wellen $(k_n, \mathbf{v}_n)$ berechnen
   $\rightarrow$ da θ_n benötigt wird
2. FE-System in der x-y-Ebene lösen

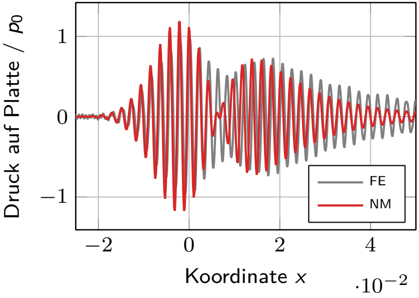
Bemerkungen:

- 1D + 2D Problem
  $\rightarrow$ entsprechend höherer Rechenaufwand
- Offene Domäne $\rightarrow$ Schwierigkeiten
- p_i und p_r separieren sich nur im Fernfeld

Lehrstuhl für Sensorik

Beispiel: Plexiglasplatte und Wasser





niedriger Impedanzunterschied

- S1' Mode bei $1{,}4\,\mathrm{MHz\,mm}$
- Strahlbreite: $\alpha_n w = 0.5$
  $\rightarrow$ $w = 0{,}64\,\mathrm{cm}$

Problem:

Abklingverhalten wird durch α_n nicht richtig abgeschätzt!

Quasi-geführte Wellen

- exakte Fluid-Struktur Interaktion [5]

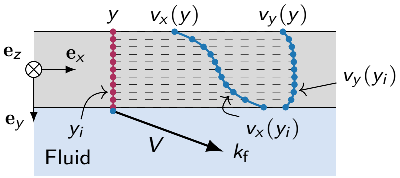


Abbildung: Platte mit angrenzendem Fluid

- Eigenwertproblem für $[\mathbf{v}(y), V]^\top$
  - $\rightarrow$ 1 zusätzlicher Freiheitsgrad
  - $\rightarrow$ liefert komplexe Wellenzahlen:

$$k_n^{\mathrm{l}} = \mathrm{Re}\, k_n^{\mathrm{l}} + \mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, k_n^{\mathrm{l}}$$

Idee

Können quasi-geführte Wellen zur Berechnung verwendet werden?

[5] D. A. Kiefer u. a. "Calculating the full leaky Lamb wave spectrum with exact fluid interaction". In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 145.6 (1. Juni 2019), S. 3341–3350

Berechnung mit quasi-geführten Wellen

- ersetze $k_n + \mathrm{i}\alpha_n$ durch $k_n^{\mathrm{l}} = \mathrm{Re}\, k_n^{\mathrm{l}} + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, k_n^{\mathrm{l}}$:

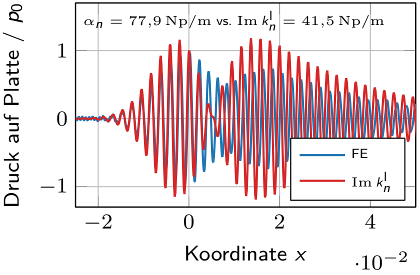
$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\underbrace{(k_n + \mathrm{i}\alpha_n)}_{k_n^{\mathrm{l}}}\right] a_n(x) = \frac{v_{yn}^* p_{\mathrm{i}}(x)}{2\overline{P}_n}$$

$\rightarrow$ vermeide Berechnung von $\alpha_n \approx \mathrm{Im}\, k_n^{\mathrm{l}}$

- ersetze auch v_{yn}^* und $\overline{P}_n$ durch die entsprechende Größen der quasi-geführten Wellen

  $\rightarrow$ funktioniert nicht

  $\rightarrow$ da Normalmoden Theorie nicht gültig



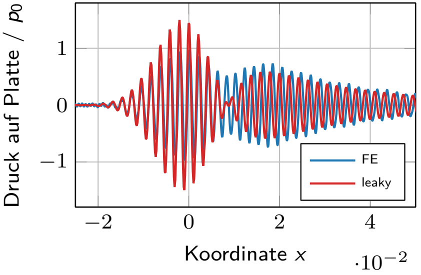


Abbildung: Plexiglas-Wasser, S1' bei $1{,}4\,\mathrm{MHz\,mm}$, $\alpha_n w = 0.5$

Lehrstuhl für Sensorik

Quasi-Normalmoden Theorie

Quasi-Normalmoden Theorie für abstrahlende Wellen benötigt! [6]

[6] E. S. C. Ching u. a. "Quasinormal-mode expansion for waves in open systems". In: *Reviews of Modern Physics* 70.4 (1. Okt. 1998), S. 1545–1554

Zusammenfassung

- Nicht-spiegelnde Reflexion
  - → Grund: geführte Wellen
  - → bei Einfall unter dem kritischen Winkel
  - → Überlagerung von schallhart reflektiertem Strahl und abgestrahltem Wellenfeld
- Berechnung mittels Normalmoden-Theorie
  - → zwei 1d-Probleme → sehr effizient
  - → perfekt geführte Wellen (Lambwellen)
  - → gute Genauigkeit für schwach abstrahlende Moden

- Quasi-geführte Wellen
  - → exakte Fluid-Struktur Interaktion
  - → Liefern komplexe Wellenzahlen d.h., berücksichtigen Abstrahlung

Herausforderung:

Entwicklung einer Quasi-Normalmoden Theorie für abstrahlende Lambwellen