Berechnung der vollständigen Dispersionscharakteristik von abstrahlenden Lambwellen mittels Variablentransformation

Daniel A. Kiefer   Michael Ponschab   Stefan J. Rupitsch

Lehrstuhl für Sensorik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
91052 Erlangen, Deutschland

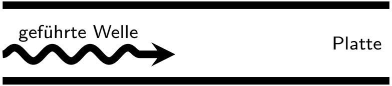
21. März 2019 – DAGA Rostock

Lehrstuhl Sensorik

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

Motivation

Geführte Wellen in Festkörpern:



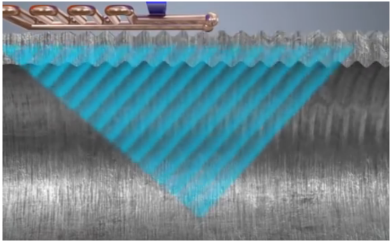


Abbildung: Welle in Rohrwand[1]

- Zerstörungsfreie Werkstoffprüfung
  - → hohe Reichweite
  - → z. B. Prüfen von Rohren
- Ultraschallmesstechnik
  - → parasitär oder gezielt genutzt
  - → z. B. Durchflussmesstechnik

> Wie findet die **Interaktion** zwischen der Platte und dem Fluid statt?

Lehrstuhl für Sensorik

[1] ROSEN Group. *ROSEN EMAT Flowmeter*. 2018. URL: http://flowmeter.rosen-group.com/

Inhalt

Lehrstuhl für Sensorik

Lambwellen und Dispersion

- **Lambwelle:** geführte Welle in einer freien Platte mit Verschiebungen in der x-y-Ebene
- sind dispersiv:

Dispersion

Wellenzahl ist frequenzabhängig:

$$k_x = k_x(f) \quad \Leftrightarrow \quad c_\mathrm{p} = c_\mathrm{p}(f)$$

- Der Zusammenhang $k_x(f)$ wird durch die **charakteristische Gleichung**

$$F(k_x, f) = 0$$

in impliziter Form beschrieben.

- Diese ist jedoch transzendent!
  - $\rightarrow$ **numerische Methoden** nötig
  - $\rightarrow$ schlecht konditioniert

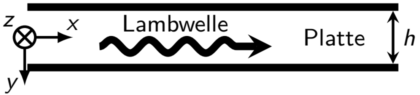


Abbildung: Querschnitt der Platte

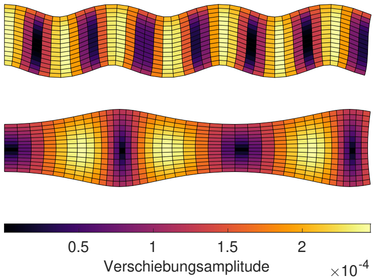


Abbildung: Grundmoden in einer freien Platte.
Oben: anti-symmetrische Mode A0;
Unten: symmetrische Mode S0.

Interaktion mit einem angrenzenden Fluid

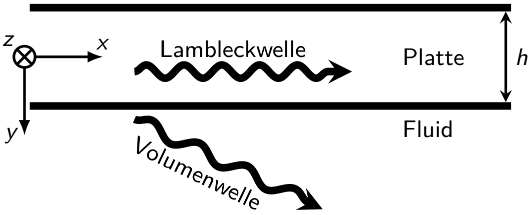
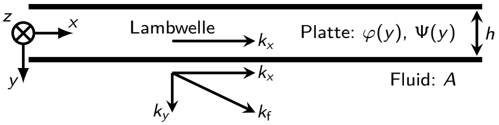


Abbildung: Querschnitt der Platte mit angrenzendem Fluid.

- **Lambleckwelle:** in Platten, die an ein Fluid angrenzen
- regt im Fluid eine **ebene Volumenwelle** an
  - → **Veränderte und neue Moden** im Vergleich zur freien Platte
  - → gibt Energie an das Fluid ab
  - → durch Abstrahlung bedämpft

Lehrstuhl für Sensorik

Modellierung



- **Platte**: harmonische Wellenausbreitung in x-Richtung:

$$\varphi_p(x, y, t) := \varphi(y)\, e^{i(k_x x - \omega t)}$$

$$\Psi_p(x, y, t) := i\Psi(y)\, e^{i(k_x x - \omega t)}$$

- **Halbraum** $y > h/2$: Fluid-Domäne
  - Annahme ebener Wellenausbreitung:

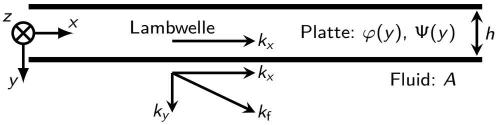
$$\varphi_f(x, y, t) := A\, e^{i k_y y}\, e^{i(k_x x - \omega t)}$$

$\rightarrow$ bis auf die Skalare A und k_y vollständig bekannt
$\rightarrow$ Bewegungs-Differenzialgleichungen nur auf $y \in [-h/2, h/2]$

$\Rightarrow$ **abgeschlossene** Domäne
$\Rightarrow$ analytisch **exakte Interaktion** Platte-Fluid

Lehrstuhl für Sensorik

Modellierung



- Bewegungsgleichungen in den Potentialen $q = [\varphi(y), \Psi(y), A]^T$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_l^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_t^2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(y) \\ \Psi(y) \\ A \end{bmatrix} = k_x^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(y) \\ \Psi(y) \\ A \end{bmatrix}$$

- Randbedingung zum Vakuum:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yy}(y) \\ \sigma_{xy}(y) \end{bmatrix}_{y=-h/2} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Randbedingungen zum Fluid:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yy}(y) + p_f(y) \\ \sigma_{xy}(y) \\ u_y(y) - u_{y,\text{fluid}}(y) \end{bmatrix}_{y=h/2} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für ein bestimmtes ω ist dies ein
$\Rightarrow$ differentielles, nichtlineares **Eigenwertproblem** in k_x.

Lehrstuhl für Sensorik

Lambleckwellen-Problem

- Diskretisierung des differenziellen Eigenwertproblems (z. B. spektrale Kollokation, FE, FD) $\rightarrow$ **algebraisches nichtlineares** Eigenwertproblem

Eigenwertproblem: Lambleckwellen

$$\underline{\underline{F}}(k_x)\underline{q} = \underline{0}\,, \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{F}}(k_x) = k_x^2 \underline{\underline{A}}_2 + k_x \underline{\underline{A}}_1 + \underline{\underline{A}}_0 + \mathrm{i}\, k_y \underline{\underline{B}}\,,$$

$$\text{wobei } k_y = \sqrt{k_\mathrm{f}^2 - k_x^2}\,.$$

- k_y ist durch k_x bestimmt, aber die Beziehung ist:

nichtlinear | nicht eindeutig | nicht holomorph

$\Rightarrow$ Schwierigkeiten beim Lösen

Lehrstuhl für Sensorik

ISE

Übliche Herangehensweise

- Nichtlinearität
  - → nichtlineare Eigenwertlöser (z. B. iterative Linearisierung)
  - → sind nicht immer zuverlässig [4]
- Eindeutigkeit
  - → lösen beider Probleme
- Holomorphie
  - → gebietsweise lösen
- offene Domäne (angrenzender Halbraum)
  - → Perfectly Matched Layer (PML), Boundary Elements (BEM), analytische Lösung im Fluid

Im Folgenden:

Überführen des nichtlinearen Eigenwertproblems in ein **lineares** Eigenwertproblem.

[4] Volker Mehrmann und Heinrich Voss. "Nonlinear eigenvalue problems: a challenge for modern eigenvalue methods". en. In: *GAMM-Mitteilungen* 27.2 (Dez. 2004), S. 121–152

Variablentransformation

nichtlineares Eigenwertproblem für Lambleckwellen:

$$\underline{\underline{F}}(k_x)\underline{q} = \underline{0}\,, \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{F}}(k_x) = k_x^2\underline{\underline{A}}_2 + k_x\underline{\underline{A}}_1 + \underline{\underline{A}}_0 + \mathrm{i}\,k_y\underline{\underline{B}}\,,$$

$$\text{wobei } k_y = \sqrt{k_\mathrm{f}^2 - k_x^2}\,.$$

Variablentransformation:

$$k_x := k_\mathrm{f}\frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2} \quad \Rightarrow \quad k_y = \pm k_\mathrm{f}\frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2\mathrm{i}}$$

resultiert in zwei **äquivalente**

polynomielle Eigenwertprobleme

$$\underline{\underline{P}}^{\pm}(\gamma)\underline{q} = \underline{0} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{P}}^{\pm}(\gamma) := 4\gamma^2\underline{\underline{F}}(k_x(\gamma))$$
$$= \underline{\underline{P}}_4\gamma^4 + \underline{\underline{P}}_3^{\pm}\gamma^3 + \underline{\underline{P}}_2\gamma^2 + \underline{\underline{P}}_1^{\pm}\gamma + \underline{\underline{P}}_0$$

$\Rightarrow$ sind **linearisierbar!**

Lehrstuhl für Sensorik

Eindeutigkeit

- $\underline{\underline{P}}^+$ und $\underline{\underline{P}}^-$ bestimmen jeweils vollständig und eindeutig das Spektrum von $\underline{\underline{F}}$!

Grund:

1. Spektrum von $\underline{\underline{P}}^-$ ist das invertierte von $\underline{\underline{P}}^+$, da

$$\underline{\underline{P}}^+(\gamma) = \gamma^4 \underline{\underline{P}}^-(\gamma^{-1}) \,.$$

2. Die zugehörigen Wellenzahlen k_x sind gleich, da

$$k_x(\gamma) = k_\mathrm{f} \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2} = k_x(\gamma^{-1}) \,.$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{P}}^+$ und $\underline{\underline{P}}^-$ resultieren im gleichen Wellenzahl-Spektrum k_x.

$\Rightarrow$ Wähle ohne Einschränkung, z. B., $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{P}}^+$

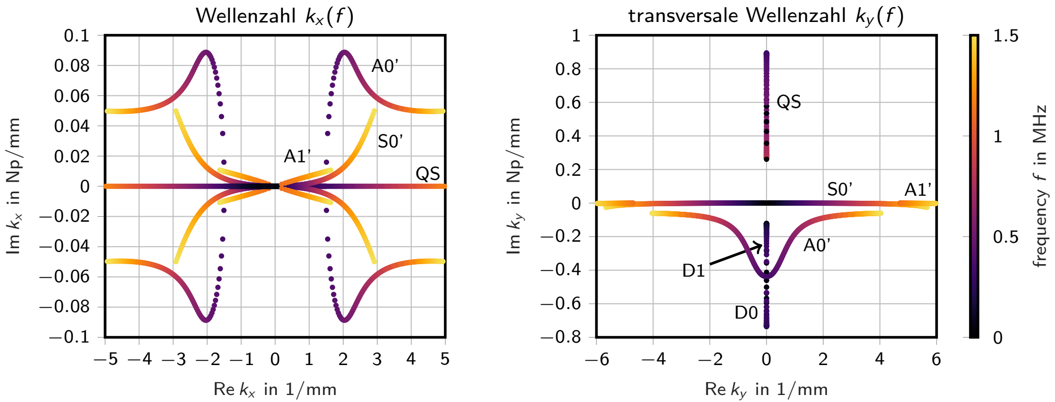
vollständige, **eindeutige**, **holomorphe** und **linearisierbare** Problembeschreibung!

Lösen des Lambleckwellen-Problems

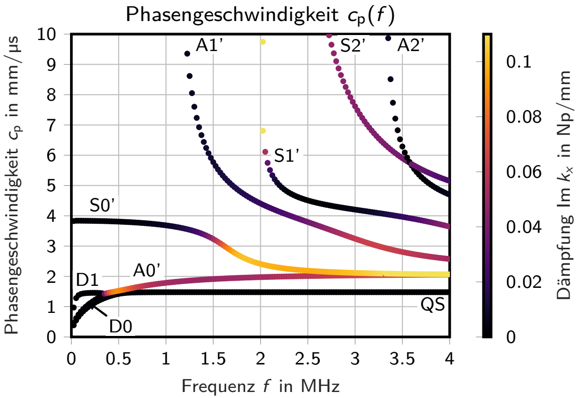
Somit kann das Lambleckwellen-Problem folgendermaßen gelöst werden:

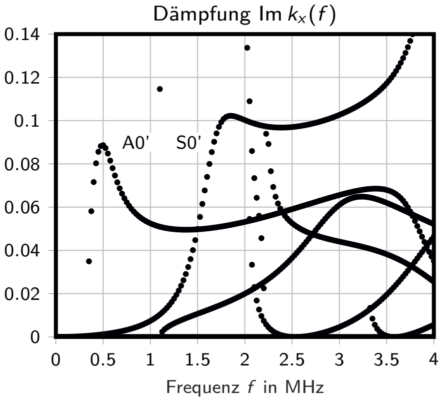
1. Nehme im Halbraum ebene Wellenausbreitung an
   $\rightarrow$ Formulierung auf abgeschlossener Domäne
2. Diskretisiere das differentielle Eigenwertproblem
3. Variablentransformation $k_x(\gamma) = k_\mathrm{f} \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}$
4. Wähle ohne Einschränkung $\underline{\underline{P}}$ als $\underline{\underline{P}}^+$ oder $\underline{\underline{P}}^-$
5. Führe ein Zustandsraum ein, sodass das polynomielle Eigenwertproblem $\underline{\underline{P}}(\gamma)\underline{q} = \underline{0}$ lineare Gestalt annimmt.
6. Löse das **lineare Eigenwertproblem** mit Standardmethode
   $\rightarrow$ Eigenwerte γ_n, Eigenvektoren $\underline{q}_n$
7. Berechne die Wellenzahlen $k_x(\gamma_n)$ und ggf. zugehörige $k_y(\gamma_n)$

Wellenzahl-Spektrum: 1 mm-Messingplatte einseitig angrenzend an Wasser



Phasengeschwindigkeit und Dämpfung: 1 mm-Messingplatte einseitig angrenzend an Wasser





Verschiebungsfelder: 1 mm-Messingplatte einseitig angrenzend an Wasser

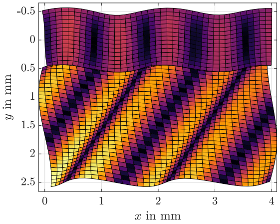


Abbildung: A0'-Mode bei $f = 1\,\mathrm{MHz}$

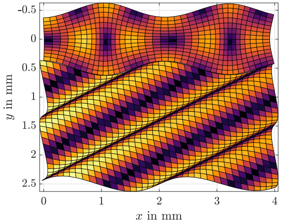


Abbildung: S0'-Mode bei $f = 1{,}5\,\mathrm{MHz}$

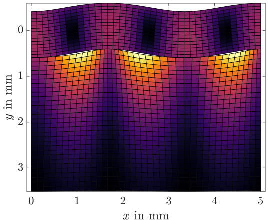


Abbildung: QS-Mode bei $f = 0{,}4\,\mathrm{MHz}$

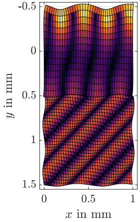


Abbildung: A0'-Mode bei $f = 4\,\mathrm{MHz}$

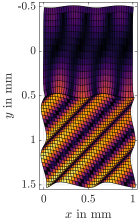
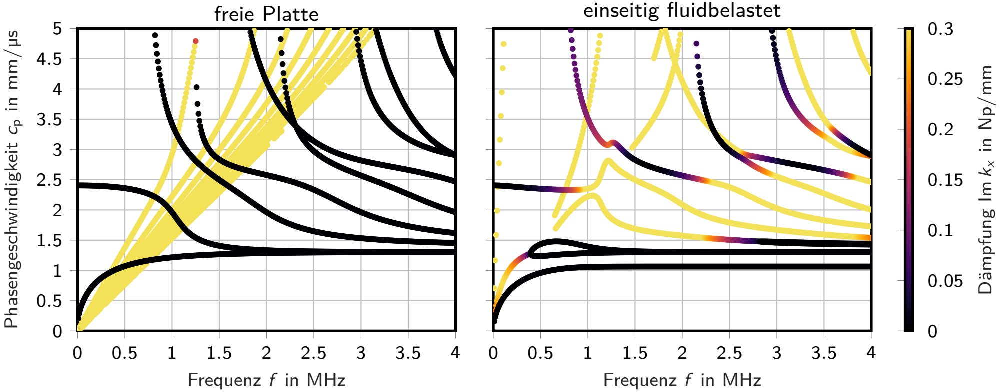


Abbildung: S0'-Mode bei $f = 4\,\mathrm{MHz}$

1 mm-Plexiglasplatte einseitig angrenzend an Wasser



Dispersionskurven der fluidbelasteten Platte können sich deutlich von denen der freien Platte unterscheiden.

Zusammenfassung und Ausblick

Problemstellung:

- Eigenwertproblem besser konditioniert als Nullstellensuche
- jedoch ein nichtlineares Eigenwertproblem wegen Interaktion mit dem Fluid

Vorteile der Methode:

+ Variablentransformation führt auf linearisierbares Eigenwertproblem
+ Lösen mit modernen linearen Eigenwertlösern ist sehr **zuverlässig** und **effizient**.
+ führt auf **vollständiges** Wellenzahl-Spektrum

Anwendbar für:

+ viskoelastische, anisotrope, inhomogene, geschichtete Platten

Einschränkungen:

— nur ebene Geometrien mit unendlicher Ausdehnung

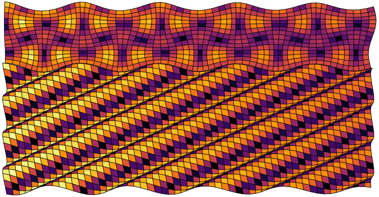
— keine viskose Fluide

— nicht geeignet für zwei verschiedene angrenzende Fluide

Lehrstuhl für Sensorik

ISE

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



Vergleich zur charakteristischen Gleichung

1 mm-Messingplatte einseitig angrenzend an Wasser

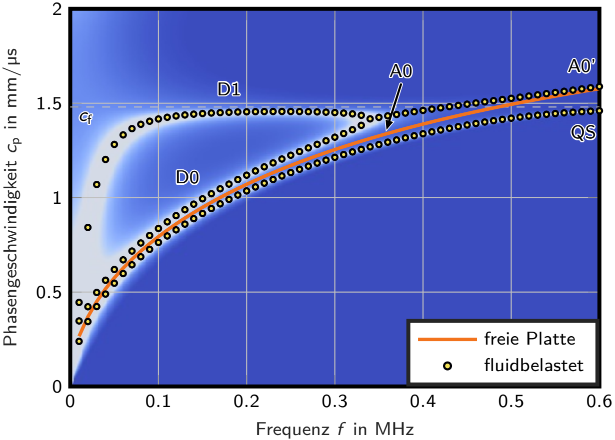


Abbildung: Ausschnitt der Dispersionskurven im unteren Frequenzbereich.
Hintergrund: für helle Farben tendiert der Betrag der charakteristischen Gleichung zu Null.

Lehrstuhl für Sensorik