Berechnung der Abstrahldämpfung in ebenen Wellenleitern aufgrund eines angrenzenden Fluids

Daniel A. Kiefer Michael Ponschab Stefan J. Rupitsch

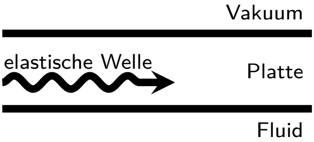
Lehrstuhl für Sensorik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
91052 Erlangen, Deutschland

22. März 2018 – DAGA München

Lehrstuhl Sensorik

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

Geführte Wellen in Festkörpern:



- Zerstörungsfreie Werkstoffprüfung
  - hohe Reichweite
  - z. B. Prüfen von Rohren
- Ultraschallmesstechnik
  - parasitär oder gezielt genutzt
  - z. B. Durchflussmesstechnik

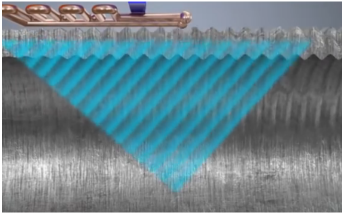
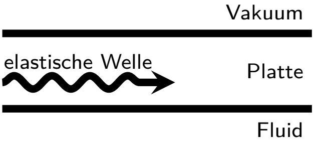


Abb.: Welle in Rohrwand[1]

[1] ROSEN Group. *ROSEN EMAT Flowmeter*. 2018. URL: http://flowmeter.rosen-group.com/

Motivation
Geführte Wellen

Geführte Wellen in Festkörpern:



- Zerstörungsfreie Werkstoffprüfung
  - hohe Reichweite
  - z. B. Prüfen von Rohren
- Ultraschallmesstechnik
  - parasitär oder gezielt genutzt
  - z. B. Durchflussmesstechnik

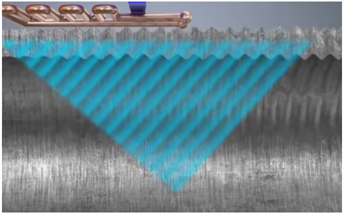


Abb.: Welle in Rohrwand[1]

Wichtiger Parameter:

Wie viel Energie gibt die geführte Welle an die Umgebung ab?

[1] ROSEN Group. *ROSEN EMAT Flowmeter*. 2018. URL: http://flowmeter.rosen-group.com/

Inhalt

Grundlagen
Lambwellen – Abstrahlung in ein Fluid

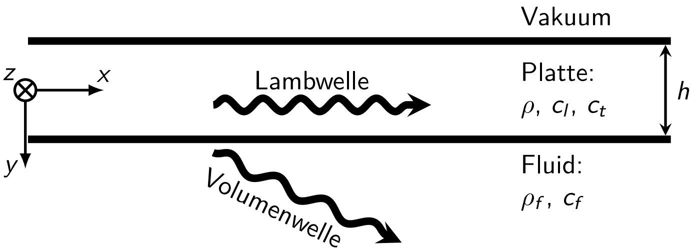


Abb.: Querschnitt der Platte mit angrenzendem Fluid.

- **Lambwelle:** geführte Welle in der Platte mit Teilchenbewegung in der x-y-Ebene
- regt im angrenzenden Fluid eine Volumenwelle an
  $\rightarrow$ Abgabe von Energie an die Umgebung
  $\rightarrow$ **Abstrahldämpfung**: Imaginärteil der Wellenzahl k_x

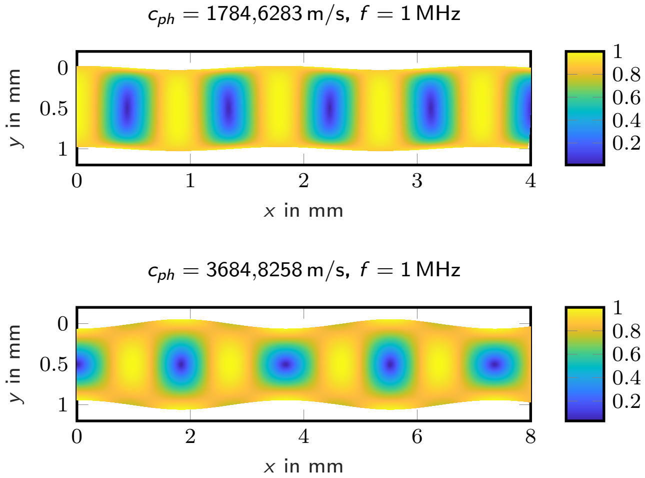


Abb.: **Oben**: Antisymmetrische Mode A0; **Unten**: Symmetrische Mode S0. Normierte totale Verschiebungsamplitude als Farbskala.

- Lambwellen sind dispersiv:

Dispersion

Wellenzahl ist frequenzabhängig:

$$k_x = k_x(f) \qquad \Leftrightarrow \qquad c_{ph} = c_{ph}(f)$$

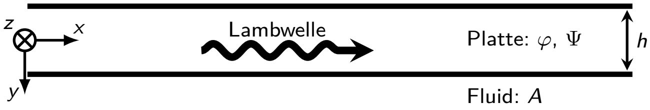
- Der Zusammenhang $k_x(f)$ wird durch die **charakteristische Gleichung**

$$F(k_x, f) = 0$$

in impliziter Form beschrieben.

- Diese ist jedoch transzendent!
$\rightarrow$ **numerische Methoden** nötig
$\rightarrow$ schlecht konditioniert

Grundlagen
Wellenausbreitung in Festkörpern



Potentialansatz für isotrope, homogene Platte:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_\mathrm{x} \\ u_\mathrm{y} \\ 0 \end{bmatrix} = \nabla\varphi(x,y,t) + \nabla \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi(x,y,t) \end{bmatrix}$$

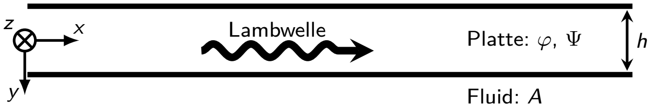
$$\vec{u}_\mathrm{f} = \nabla\varphi_f(x,y,t)$$

Harmonische Wellenausbreitung in x-Richtung:

$$\varphi(x,y,t) := \varphi(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\mathrm{x}x-\omega t)}$$

$$\Psi(x,y,t) := \mathrm{i}\,\Psi(y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\mathrm{x}x-\omega t)}$$

$$\varphi_f(x,y,t). = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k_\mathrm{f}^2-k_\mathrm{x}^2}\,y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\mathrm{x}x-\omega t)}$$



Bewegungsgleichungen in den Potentialen $p = [\varphi(y), \Psi(y), A]^T$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_\mathrm{l}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_\mathrm{t}^2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(y) \\ \Psi(y) \\ A \end{bmatrix} = k_\mathrm{x}^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(y) \\ \Psi(y) \\ A \end{bmatrix}$$

Randbedingung zum Vakuum:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\mathrm{yy}(y) \\ \sigma_\mathrm{xy}(y) \end{bmatrix}_{y=-h/2} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Randbedingungen zum Fluid:

$$\begin{bmatrix} \sigma_\mathrm{yy}(y) + p_\mathrm{f}(y) \\ \sigma_\mathrm{xy}(y) \\ u_\mathrm{y}(y) - u_\mathrm{y,fluid}(y) \end{bmatrix}_{y=h/2} \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ differentielles, quadratisches **Eigenwertproblem** in k_x

Kollokation

Diskretisierung der Differentialgleichungen

- Problem ist kontinuierlich über die Koordinate y.
- Diskretisierung: Annäherung der Differentialgleichungen mit einem algebraischen Gleichungssystem
  $\rightarrow$ lösen mit dem Rechner
- **Spektrale Kollokationsmethode**: erfolgreich für freie Platte eingesetzt [2]
  - findet zuverlässig alle Eigenwerte k_x
  - stets stabil, auch für hohes Frequenz-Dicken-Produkt fh
  - keine spezielle Behandlung für komplexe k_x nötig
  - einfach zu Implementieren
  - sehr effizient/schnell: spektrale Konvergenz
  - Modenformen $[\varphi(y), \Psi(y)]^T$ können einfach mit bestimmt werden

[2] F. Hernando Quintanilla, M. J. S. Lowe und R. V. Craster. "Modeling guided elastic waves in generally anisotropic media using a spectral collocation method". In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 137.3 (März 2015), S. 1180–1194

Lambwellen
Kiefer
Motivation
Grundlagen
Kollokation
Ergebnisse
Fazit

- Spektrale Methode: Wähle glatte, globale Ansatzfunktionen welche $[\varphi(y), \Psi(y)]^T$ nähern [3].
- Kollokationsmethode: Das Residuum an den gewählten Kollokationspunkten y_i verschwindet.
- **Differentiationsmatrix** $\underline{\underline{D}}_{\mathrm{y}}$:

$$\frac{\partial}{\partial y} \quad \mapsto \quad \underline{\underline{D}}_{\mathrm{y}}$$

$\rightarrow$ sodass für $g(y)$ gilt: $\underline{g'}[y_i] = \underline{\underline{D}}_{\mathrm{y}} \cdot \underline{g}[y_i]$

- Das diskretisierte Problem besitzt dadurch die gleiche Form wie bisher!
- resultierendes, **nichtlineares Eigenwertproblem**:

$$(\underbrace{k_{\mathrm{x}}^2 \underline{\underline{A}}_2 + k_{\mathrm{x}} \underline{\underline{A}}_1 + \underline{\underline{A}}_0}_{\underline{\underline{P}}(k_{\mathrm{x}})} + \underbrace{\sqrt{k_{\mathrm{f}}^2 - k_{\mathrm{x}}^2}}_{f(k_{\mathrm{x}})} \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{p} = \underline{0}$$

[3] J. A. Weideman und S. C. Reddy. “A MATLAB Differentiation Matrix Suite”. In: *ACM Trans. Math. Softw.* 26.4 (Dez. 2000), S. 465–519

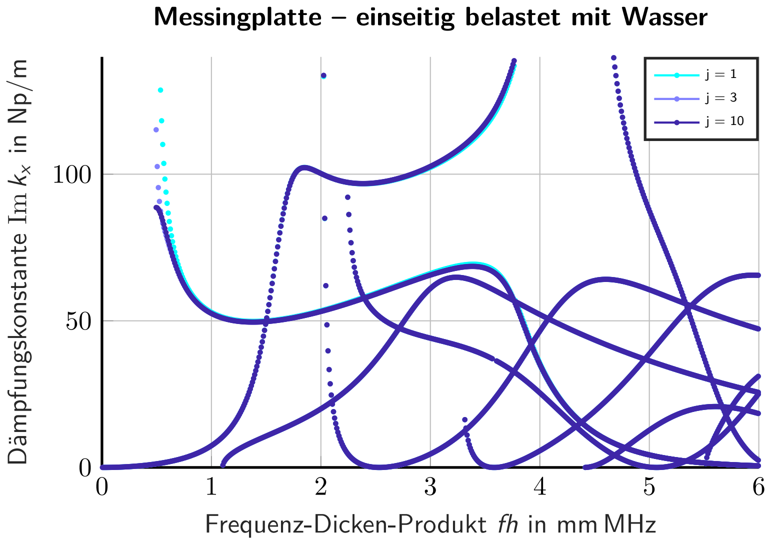
Lambwellen
Kiefer
Motivation
Grundlagen
Kollokation
Ergebnisse
Fazit

- Für lineare und polynomielle Eigenwertprobleme existieren hochentwickelte numerische Löser.
- nicht jedoch für allgemeine nichtlineare Eigenwertprobleme [4]
- Idee: Fixpunktiteration für den νten-Eigenwert $k_{x\nu}$:

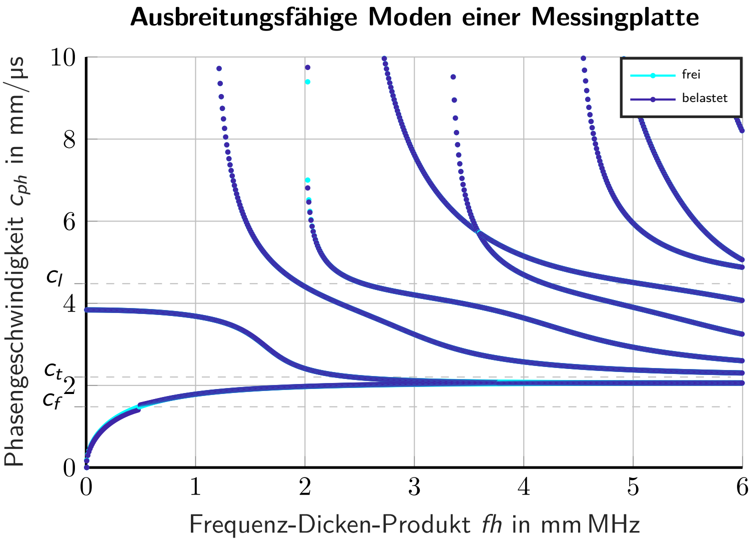
Algorithm 1 Fixpunktiteration

1: $k_{x\nu}^0 \leftarrow k_{x\nu}$ der freien Platte, $j \leftarrow 0$
2: **while** Konvergenzkriterium nicht erfüllt **do**
3: Löse: $(\kappa_i^2 \underline{\underline{A}}_2 + \kappa_i \underline{\underline{A}}_1 + \underbrace{\underline{\underline{A}}_0(f) + \sqrt{k_f^2 - (k_{x\nu}^j)^2}\,\underline{\underline{B}}}_{\text{konst.}}) \cdot \underline{\pi}_i = \underline{0}$
4: $k_{x\nu}^{j+1} \leftarrow \min_i(\kappa_i - k_{x\nu}^j)$, $\underline{p}_\nu^{j+1} \leftarrow \underline{\pi}_i$
5: $j \leftarrow j + 1$
6: **end while**

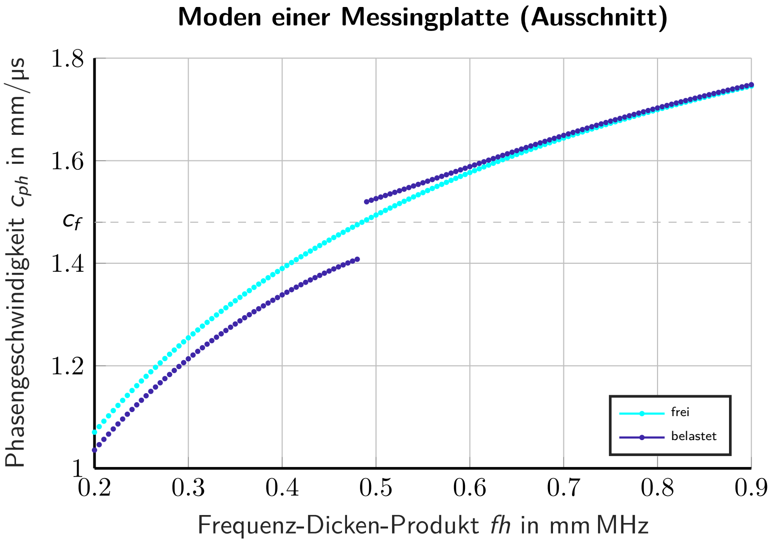
[4] Volker Mehrmann und Heinrich Voss. "Nonlinear eigenvalue problems: a challenge for modern eigenvalue methods". en. In: *GAMM-Mitteilungen* 27.2 (Dez. 2004), S. 121–152


Messingplatte – einseitig belastet mit Wasser
Dämpfungskonstante Im k_x in Np/m
0
50
100
0
1
2
3
4
5
6
Frequenz-Dicken-Produkt *fh* in mm MHz
j = 1
j = 3
j = 10

Ergebnisse


Ausbreitungsfähige Moden einer Messingplatte
Phasengeschwindigkeit c_{ph} in mm/µs
Frequenz-Dicken-Produkt fh in mm MHz
frei
belastet
c_l
c_t
c_f
0
2
4
6
8
10
0
1
2
3
4
5
6

Ergebnisse



Moden einer Messingplatte (Ausschnitt)
Phasengeschwindigkeit c_{ph} in mm/µs
1.8
1.6
c_f
1.4
1.2
1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
Frequenz-Dicken-Produkt fh in mm MHz
frei
belastet

Zusammenfassung

- Lösen des Eigenwertproblems ist besser konditioniert als Nullstellensuche der charakteristischen Gleichung!
- Differentiationsmatrizen sind ein elegantes Konzept zur Diskretisierung.
- Spektrale Kollokation mit Chebyshev-Kollokationspunkten ist für das Problem sehr gut geeignet und weist *spektrale Konvergenz* auf.
- Abstrahlung von Energie resultiert in einem nichtlinearen Eigenwertproblem mit Wurzel-Term.
  - nicht-trivial zu lösen
  - iterative Verfahren (hier: Fixpunktiteration)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!