

# Anpassbarkeit der Eigenfrequenzen von Balkenstrukturen für einen Energy Harvester

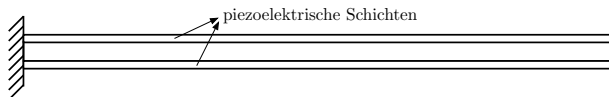
Daniel Kiefer

Bachelorarbeit  
Lehrstuhl für Sensorik  
Betreuer: Dipl.-Ing. Dominik Gedeon

Erlangen, 23. Mai 2013

# Motivation: Energy-Harvesting

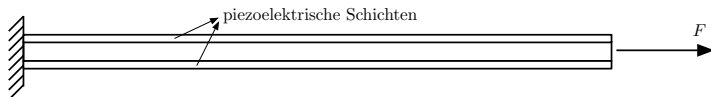
- *Energy-Harvester* versorgt Gerät aus Umgebungsenergie
- Vibrationen: hohe Energiedichte und Verfügbarkeit



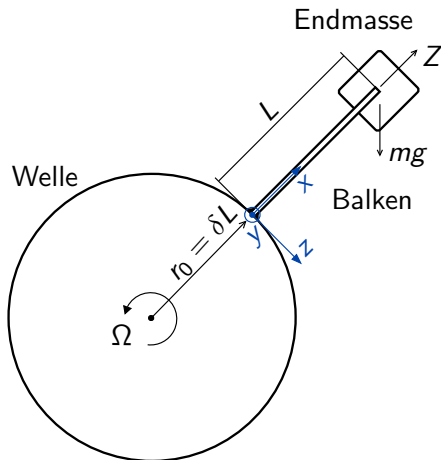
- $P_{max} \Leftrightarrow$  Resonanz
- „Stimmen“ des Harvesters:
  - ▶ z. B. durch axiale Kräfte
  - ▶ rotierender Harvester: Zentrifugalkraft

# Motivation: Energy-Harvesting

- *Energy-Harvester* versorgt Gerät aus Umgebungsenergie
- Vibrationen: hohe Energiedichte und Verfügbarkeit



- $P_{max} \Leftrightarrow$  Resonanz
- „Stimmen“ des Harvesters:
  - ▶ z. B. durch axiale Kräfte
  - ▶ rotierender Harvester: Zentrifugalkraft



- Aufgabe: FE-Simulation in rotierendem Koordinatensystem
  - ▶ zuvor: Ein-Parametermodell untersuchen

# Bewegungsdifferentialgleichungen

- rotierender Euler-Bernoulli-Balken
- nichtlineare Längsdehnung
- Schwingungen in  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Richtung: gekoppelte DGLn

$$N' + \rho A \Omega^2 (r_0 + x + w_x) + 2\rho A \Omega \dot{w}_z = \rho A \ddot{w}_x$$

$$(Nw_y')' - (EI_{zz} w_y'')'' = \rho A \ddot{w}_y$$

$$\rho A \Omega^2 w_z - 2\rho A \Omega \dot{w}_x + (Nw_z')' - (EI_{yy} w_z'')'' = \rho A \ddot{w}_z$$

# Bewegungsdifferentialgleichungen

- rotierender Euler-Bernoulli-Balken
- nichtlineare Längsdehnung
- Schwingungen in  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Richtung: gekoppelte DGLn
- Längsschwingungen vernachlässigen

$$\begin{aligned}
 N' + \rho A \Omega^2 (r_0 + x + \cancel{w_x}) + 2\rho A \Omega \dot{w}_z &= \cancel{\rho A \ddot{w}_x} \\
 (Nw_y')' - (EI_{zz} w_y'')'' &= \rho A \ddot{w}_y \\
 \rho A \Omega^2 w_z - \cancel{2\rho A \Omega \dot{w}_x} + (Nw_z')' - (EI_{yy} w_z'')'' &= \rho A \ddot{w}_z
 \end{aligned}$$

# Bewegungsdifferentialgleichungen

- rotierender Euler-Bernoulli-Balken
- nichtlineare Längsdehnung
- Schwingungen in  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Richtung: gekoppelte DGLn
- Längsschwingungen vernachlässigen
- Corioliskräfte vernachlässigen: keine Modenkopplung!

$$\begin{aligned}
 N' + \rho A \Omega^2 (r_0 + x + \cancel{w_x}) + \cancel{2\rho A \Omega \dot{w}_z} &= \cancel{\rho A \ddot{w}_x} \\
 (Nw'_y)' - (EI_{zz} w''_y)'' &= \rho A \ddot{w}_y \\
 \rho A \Omega^2 w_z - \cancel{2\rho A \Omega \dot{w}_x} + (Nw'_z)' - (EI_{yy} w''_z)'' &= \rho A \ddot{w}_z
 \end{aligned}$$

# Bewegungsdifferentialgleichungen

- rotierender Euler-Bernoulli-Balken
- nichtlineare Längsdehnung
- Schwingungen in  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Richtung: gekoppelte DGLn
- Längsschwingungen vernachlässigen
- Corioliskräfte vernachlässigen: keine Modenkopplung!

$$\begin{aligned}
 N' + \rho A \Omega^2 (r_0 + x + \cancel{w_x}) + \cancel{2\rho A \Omega \dot{w}_z} &= \cancel{\rho A \ddot{w}_x} \\
 (Nw_y')' - (EI_{zz} w_y'')'' &= \rho A \ddot{w}_y \\
 \rho A \Omega^2 w_z - \cancel{2\rho A \Omega \dot{w}_x} + (Nw_z')' - (EI_{yy} w_z'')'' &= \rho A \ddot{w}_z
 \end{aligned}$$

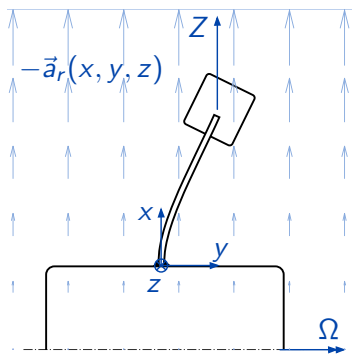
$$\begin{aligned}
 N' + \rho A \Omega^2 (r_0 + x) &= 0 \\
 (Nw_y')' - (EI_{zz} w_y'')'' &= \rho A \ddot{w}_y \\
 \rho A \Omega^2 w_z + (Nw_z')' - (EI_{yy} w_z'')'' &= \rho A \ddot{w}_z
 \end{aligned}$$



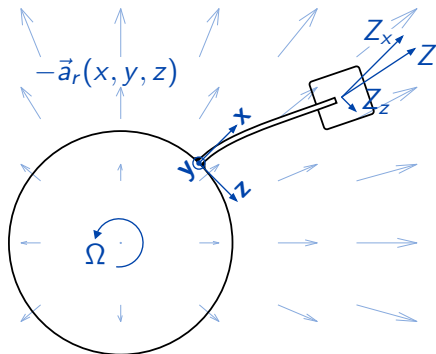
## out-of-plane und in-plane Schwingungen

out-of-plane:  $(Nw'_y)' - (El_{zz}w''_y)'' = \rho A\ddot{w}_y$

in-plane:  $\rho A\Omega^2 w_z + (Nw'_z)' - (El_{yy}w''_z)'' = \rho A\ddot{w}_z$



out-of-plane Schwingung



in-plane Schwingung

$$\rho A \ddot{w} + (EI w'')'' - (N w')' - \rho A \Omega^2 w = 0$$

Galerkin-Näherung:

$$\mathbf{M} \ddot{\underline{w}} + \left( \mathbf{K}^S + \mathbf{K}^N - \Omega^2 \mathbf{M} \right) \underline{w} = 0$$

Relation in-plane / out-of-plane

$$\mathbf{K}^{ip} = \mathbf{K}^{op} - \Omega^2 \mathbf{M}$$

mit  $\mathbf{K}^{ip} = \mathbf{K}^S + \mathbf{K}^N - \Omega^2 \mathbf{M}$

$$\mathbf{K}^{op} = \mathbf{K}^S + \mathbf{K}^N$$

$$\rho A \ddot{w} + (EI w'')'' - (N w')' - \rho A \Omega^2 w = 0$$

Galerkin-Näherung:

$$\mathbf{M} \ddot{\underline{w}} + \left( \mathbf{K}^S + \mathbf{K}^N - \Omega^2 \mathbf{M} \right) \underline{w} = 0$$

Relation in-plane / out-of-plane

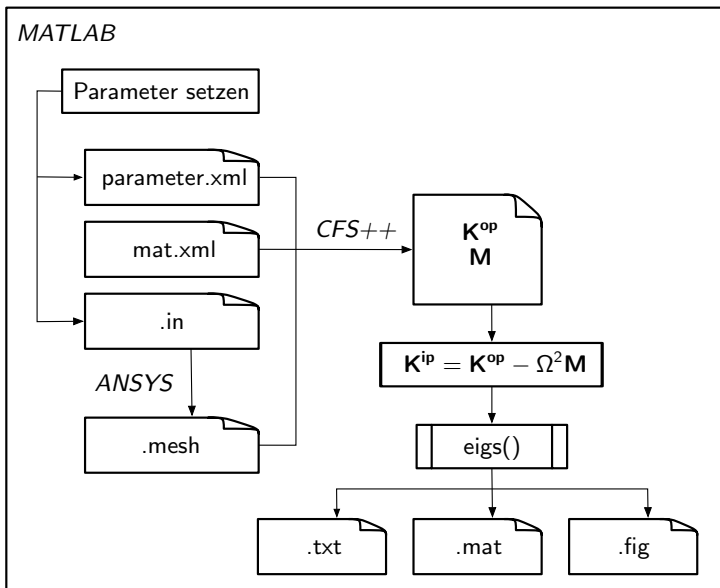


$$\mathbf{K}^{ip} = \mathbf{K}^{op} - \Omega^2 \mathbf{M}$$

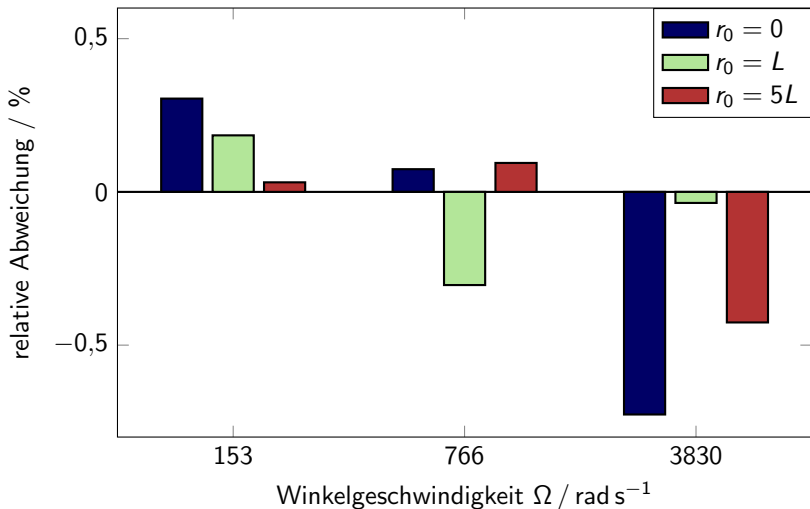
mit  $\mathbf{K}^{ip} = \mathbf{K}^S + \mathbf{K}^N - \Omega^2 \mathbf{M}$

$$\mathbf{K}^{op} = \mathbf{K}^S + \mathbf{K}^N$$

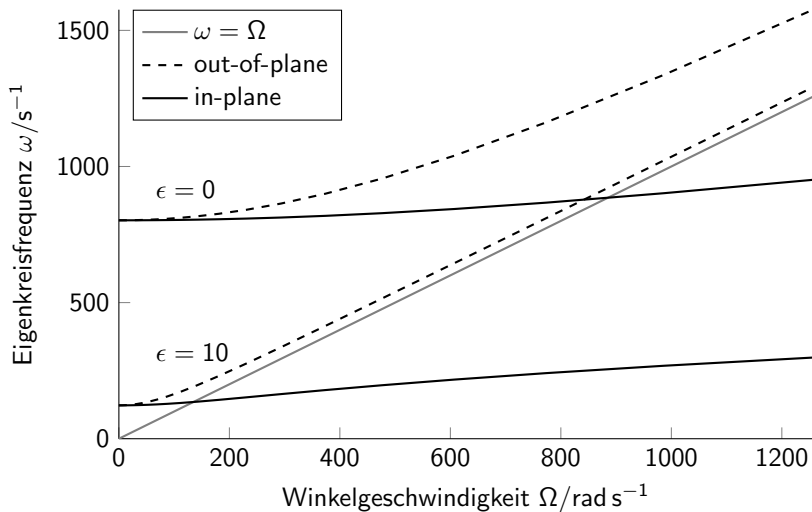
Analog für FEM

Eine Iteration bzw. Rekursionsschritt in *MATLAB*:

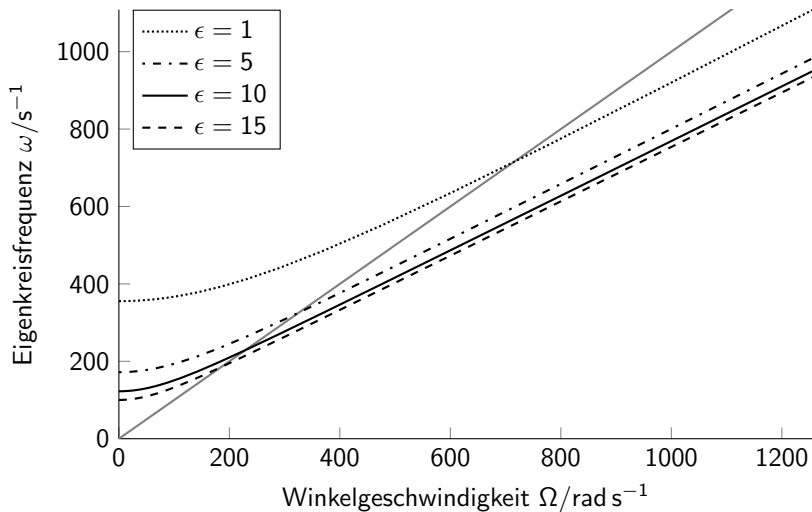
Relative Abweichung (%) der Simulationsergebnisse für  $m = 0$  zu Ergebnissen von Yoo und Shin [1, Tabelle 3]:



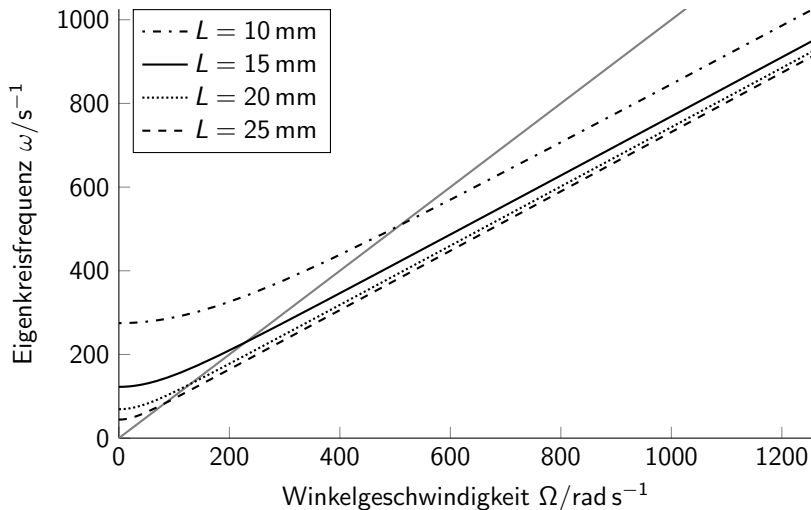
*Out-of-plane* und *in-plane* Eigenkreisfrequenzen  $\omega(\Omega)$  für  
Länge  $L = 15 \text{ mm}$ , Abstand  $\frac{r_0}{L} = \delta = 0$



Eigenkreisfrequenzen  $\omega(\Omega)$  für das Massenverhältnis  $\epsilon$  mit Länge  $L = 15 \text{ mm}$ , Abstand  $\frac{r_0}{L} = \delta = 0,5$

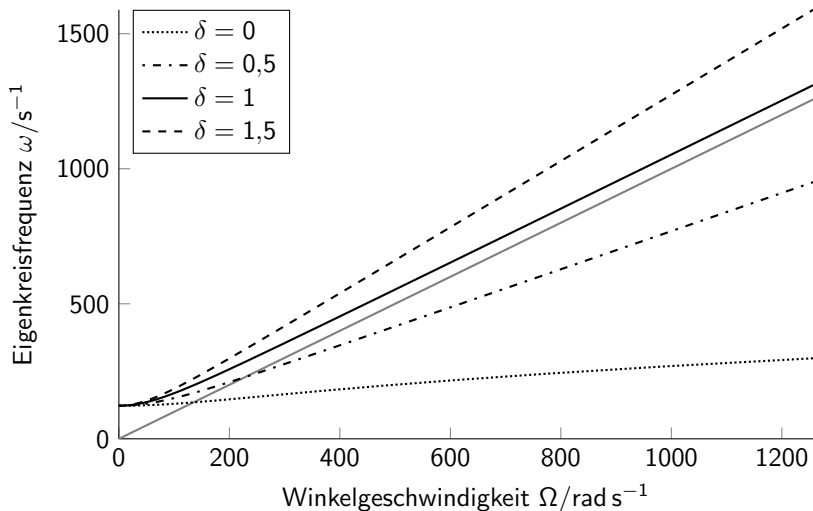


Eigenkreisfrequenzen  $\omega(\Omega)$  für die Länge des Balkens  $L$  mit Massenverhältnis  $\epsilon = 10$ , Abstand  $\frac{r_0}{L} = \delta = 0,5$





Eigenkreisfrequenzen  $\omega(\Omega)$  für den normierten Abstand zur Rotationsachse  $\delta = \frac{r_0}{L}$  mit Massenverhältnis  $\epsilon = 10$ , Länge  $L = 15 \text{ mm}$



# Zusammenfassung

- Simulation in rotierendem Koordinatensystem  $(x, y, z)$

- Zentrifugalkraft  $\vec{Z}(\Omega, w_z) = \begin{pmatrix} Z_x \\ 0 \\ Z_z(w_z) \end{pmatrix}$

- Hauptanteil  $Z_x$ : „prestress“ in *CFS++*
- Divergenzanteil  $Z_z(w_z)$  bei *in-plane* Schwingungen
  - ▶ Nichtlineare Simulation vermeiden durch Transformation der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^{ip} = \mathbf{K}^{op} - \Omega^2 \mathbf{M}$ .
- Resonanzstellen für *in-plane*:  $\exists \Omega_r \in (\omega_0, \Omega_{max}] : \omega = \Omega_r$
- Asymptotische Steigung  $\lambda = \lambda(r_0) \rightarrow$  gut einstellbar
- Struktursteifigkeit  $\mathbf{K}^s$  klein  $\rightarrow$  gute Näherung an  $\omega = \Omega$

# Ausblick

- harmonische Analyse
- Belastbarkeitsuntersuchung
- Asymptotische Steigung  $\lambda$  berechenbar:  $\mathbf{K}^s \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$ 
  - ▶  $\lambda_{ideal} = 1$
  - ▶ automatisierte Optimierung möglich
- Seil mit piezoelektrischen Fasern:  $\mathbf{K}^s \approx \mathbf{0}$

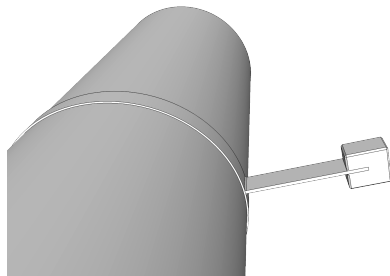
# Literaturverzeichnis I

[1] YOO, H. H. ; SHIN, S. H.:

Vibration analysis of rotating cantilever beams.

In: *Journal of Sound and Vibration* 212 (1998), Nr. 5, S. 807–828

*Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!*



$$\rho A \ddot{w} + (EI w'')'' - (N w')' - \rho A \Omega^2 w = 0$$

schwache Form + Näherungsansatz  $\tilde{w}(x, t) = \sum_{k=1}^p w_k(t) \phi_k(x)$ :

### Galerkin-Näherung

$$\mathbf{M} \ddot{\underline{w}} + (\mathbf{K}^s + \mathbf{K}^N - \mathbf{K}^d) \underline{w} = 0$$

Relation in-plane / out-of-plane

⇒

$$\mathbf{K}^{ip} = \mathbf{K}^{op} - \Omega^2 \mathbf{M}$$

da  $\mathbf{K}^{ip} = \mathbf{K}^s + \mathbf{K}^N - \mathbf{K}^d$

$$\mathbf{K}^{op} = \mathbf{K}^s + \mathbf{K}^N$$

$$\mathbf{K}^d = \Omega^2 \mathbf{M}$$

$$M_{ij} = \int_0^L \rho A \phi_j \phi_i \, dx$$

$$K_{ij}^N = \int_0^L N \phi_j' \phi_i' \, dx \stackrel{!}{=} \Omega^2 M_{ij}^N$$

$$K_{ij}^s = \int_0^L EI \phi_j'' \phi_i'' \, dx$$

$$K_{ij}^d = \int_0^L \rho A \Omega^2 \phi_j \phi_i \, dx = \Omega^2 M_{ij}$$

Eigenkreisfrequenzen  $\omega(\Omega)$  für das Massenverhältnis  $\epsilon$  mit Abstand  $\delta = 0$ , Länge  $L = 20$  mm

