

Modellierung nicht-spiegelnder Reflexion von Platten mittels quasi-geführter Wellen

Daniel A. Kiefer, Michael Ponschab

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl für Sensorik, 91052 Erlangen, Deutschland

Email: daniel.kiefer@fau.de

Einleitung

In einem V-Pfad Durchflussmessgerät wird Ultraschall von der Rohrwand reflektiert, bevor dieser zum Empfänger gelangt. Der Strahl trifft dabei unter dem kritischen Winkel auf die Rohrwand auf. Hieraus resultiert eine sogenannte *nicht-spiegelnde Reflexion* [1–3]. Im Gegensatz zur Spiegelnden wird der Strahl axial versetzt (Schoch-Verschiebung), verbreitert und es tritt eine Auslöschungszone auf. Bereits in den ersten Publikationen durch Schoch [1, 2] wird das Phänomen als Resultat von geführten Wellen in der Platte aufgefasst.

Lambwellen: Geführte Wellen in einer Platte

In einer freien Platte breiten sich geführte Wellen aus. Jene mit Polarisierung in der xy -Ebene sind für uns von Interesse, welche als *Lambwellen* [4] bezeichnet werden. Sie ergeben sich als Eigenlösungen des Systems, wobei ein harmonischer Ansatz der Form $\mathbf{v}(x, y, t) = \mathbf{v}_n(y) e^{i(k_{xn}x - \omega t)}$ für die Teilchengeschwindigkeit angenommen wird. Hierin sind x und y die Koordinaten entsprechend Abb. 1, t die Zeit, ω die Kreisfrequenz, k_{xn} die Wellenzahl der n ten Lösung und $\mathbf{v}_n(y)$ die zugehörige Verteilung der Teilchengeschwindigkeiten.

Zur Veranschaulichung ist in Abb. 1 die erste symmetrische (S0) und die erste antisymmetrische (A0) Welle gezeigt. Erstere stellt eine Dehnwelle in der Platte dar, während zweitere als Biegewelle aufgefasst werden kann.

Die Eigenlösungen werden häufig als “Moden” bezeichnet – es ist jedoch anzumerken, dass das Lambwellen-Problem ein nicht-selbstadjungiertes Eigenwertproblem ist und somit nicht im üblichen Sinne von Moden zu sprechen ist. Von Auld [4] und Kino [5] wurde trotzdem eine analoge *Normalmoden-Theorie* (NM-Theorie) für Lambwellen entwickelt. Dies bedeutet, dass das Wellenfeld in der Platte als Überlagerung der Eigenlösungen dargestellt werden kann. Diese Theorie ist im Folgenden zur Synthese von Wellenfeldern von Relevanz.

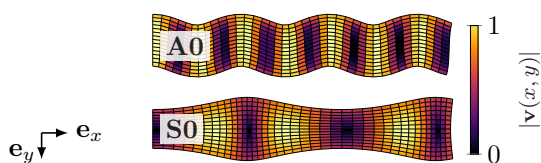


Abbildung 1: Grundmoden einer Platte. Die A0-Welle stellt eine Biegewelle dar, während die S0-Welle als Dehnwelle aufgefasst werden kann.

Modale Berechnung der nicht-spiegelnden Reflexion mit Lambwellen

Fällt Ultraschall auf eine elastische Platte ein, werden darin Lambwellen angeregt. Wie von Jia [6] gezeigt wurde, kann dies mit Hilfe der NM-Theorie modelliert werden. Im Gegensatz zu [6] wird im Folgenden eine reine Druck-Formulierung präsentiert.

Der grundlegende Prozess ist schematisch in Abb. 2 dargestellt. Maßgeblich für Anregung der n ten Lambwelle ist die Druckverteilung $p_i(x)$ des einfallenden Strahles. Da die Platte in Ruhe ist, wird dieser zunächst schallhart reflektiert [7], wodurch der Druck verdoppelt wird. Eine angeregte Lambwelle in der Platte strahlt wiederum eine akustische Leckwelle p_{ln} in das Fluid aus. Der Gesamtdruck der auf die Platte wirkt, ist also als Überlagerung von einfallendem, schallhart reflektiertem und abgestrahltem Druck zu verstehen:

$$p(x) = 2p_i(x) + p_{ln}(x). \quad (1)$$

Die normale Teilchengeschwindigkeit an der Oberfläche der Platte muss mit der Schallschnelle im Fluid übereinstimmen. Ersteres ist durch die modale Geschwindigkeitsverteilung als $v_{yn} := v_{yn}(y)|_{y=-h/2}$ vorgegeben. Mit Hilfe der modalen Feldverteilung $a_n(x)$ entlang der Platte, welche es noch zu Bestimmen gilt, ergibt sich somit die abgestrahlte Druckverteilung durch

$$p_{ln}(x) = -\frac{Z_f}{\cos \theta_n} v_{yn} a_n(x), \quad (2)$$

worin $Z_f = \rho_f c_f$ die akustische Impedanz des Fluid darstellt und θ_n der modale Abstrahlwinkel aus der Plattenormalen ist. Aus dem Druck $p(x)$ sollen im Folgenden die Wellenbewegungen der Platte bestimmt werden.

Die NM-Theorie [4, 5] stellt ein beliebiges Wellenfeld in der Platte, also Teilchengeschwindigkeit $\mathbf{v}(x, y)$ und mechanischer Spannungstensor $\mathbf{T}(x, y)$, als Überlagerung

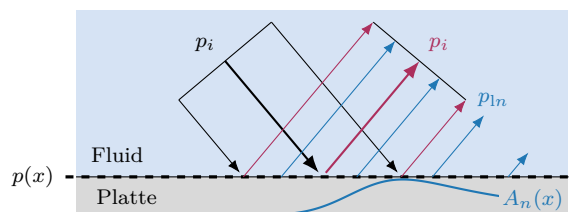


Abbildung 2: Anregung von Lambwellen in einer Platte durch einen einfallenden Druck p_i . Die resultierende Amplitudenverteilung entlang der Platte ist $A_n(x)$.

von Lamb-Moden dar. Mit dem skalaren Expansionskoeffizienten $a_n(x)$, wird das Wellenfeld als

$$\mathbf{v}(x, y) = \sum_n a_n(x) \mathbf{v}_n(y), \quad \mathbf{T}(x, y) = \sum_n a_n(x) \mathbf{T}_n(y) \quad (3)$$

angesetzt, worin $\mathbf{v}_n(y)$ und $\mathbf{T}_n(y)$ die Feldverteilungen der n ten Mode sind.

Die Aufgabe besteht nun darin, aus dem Gesamtdruck $p(x)$, der auf die Plattenoberfläche wirkt, die resultierenden Expansionskoeffizienten $a_n(x)$ zu ermitteln. Aus dem elastodynamischen Reziprozitätstheorem lässt sich unter Zunahme der Orthogonalitätsbeziehung für ausbreitungsfähige Moden (reelle Wellenzahlen k_{xn}) eine solche Bestimmungsgleichung herleiten. Für die Details sei auf [4, 5] verwiesen. Die Bestimmungsgleichung lautet

$$4\bar{P}_n(\partial_x - ik_{xn})a_n(x) = v_{yn}^* p(x), \quad (4)$$

worin ∂_x die partielle Ableitung nach x darstellt und \bar{P}_n den modalen Leistungsfluss entlang der Platte bezeichnet.

Durch verwenden von (1) und (2) ergibt sich für den Quellterm auf der rechten Seite

$$v_{yn}^* p(x) = 2v_{yn}^* p_i(x) - \frac{Z_f}{\cos \theta_n} |v_{yn}|^2 a_n(x). \quad (5)$$

Die Anregung ist also selbst von der unbekanntem Feldverteilung $a_n(x)$ abhängig. Dies lässt sich durch Einsetzen von (5) in (4) und anschließendem Umstellen auflösen und ergibt

$$[\partial_x - i(k_{xn} + i\alpha_n)]a_n(x) = \frac{v_{yn}^* p_i(x)}{2\bar{P}_n}, \quad (6)$$

mit dem Abklingkoeffizienten

$$\alpha_n = \frac{Z_f}{4\bar{P}_n \cos \theta_n} |v_{yn}|^2. \quad (7)$$

Die Lösung von (6) soll bestimmt werden. Hierzu wird berücksichtigt, dass Lambwellen einen harmonischen Ansatz entlang x darstellen und somit $a_n(x) = A_n(x) e^{ik_{xn}x}$ sein muss. $A_n(x)$ bezeichnen wir fortan als *modale Amplitude*. Hiermit ergibt sich die Lösung zu

$$a_n(x) = \frac{v_{yn}^*}{2\bar{P}_n} e^{i(k_{xn} + i\alpha_n)x} \int_{-\infty}^x p_i(\xi) e^{-i(k_{xn} + i\alpha_n)\xi} d\xi. \quad (8)$$

Mit $a_n(x)$ ist auch der abgestrahlte Druck $p_{1n}(x)$ der einzelnen Lambwellen bekannt. Zusammen mit dem schallhart reflektierten Druck $p_i(x)$ ergibt sich der *reflektierte Gesamtdruck* zu

$$p_r(x) = p_i(x) - \sum_n \frac{Z_f}{\cos \theta_n} v_{yn} a_n(x). \quad (9)$$

Damit ist das Ziel erreicht, die Reflexion von der elastischen Platte zu beschreiben. Die modale Herangehensweise erlaubt es, den Vorgang als *Interaktion zwischen eintreffendem Schall und geführten Wellen* in der Platte zu interpretieren. Bei Schalleinfall unter dem kritischen Winkel θ_n , kann in guter Näherung lediglich die n te Lambwelle hierfür herangezogen werden. Wenn der Einfallswinkel nicht einem kritischen Winkel entspricht, werden die Lambwellen nur in geringem Maße angeregt und $p_r \approx p_i$.

Validierung und Grenzen

Die modalen Größen k_{xn} , $\theta_n = \arcsin \frac{c_f}{c_{pn}}$, v_{yn} , \bar{P}_n sind bekannt, da sie sich aus dem Eigenwertproblem für Lambwellen ergeben. Die Abklingkonstante α_n kann außerdem mit (7) abgeschätzt werden. Somit muss lediglich $a_n(x)$ durch einmalige Integration entsprechend (8) berechnet werden. Das Integral wird im Folgenden numerisch mit Hilfe der **Chebfun** Toolbox [8] in Matlab berechnet.

Als Beispiel wird ein einfallender 1 MHz Gauß-Strahl der Form $p_i(x) = p_0 e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{w})^2} e^{ik_{xA0}x}$ betrachtet. Deswegen 1-sigma Breite entlang x wird zu $w = 0,4/\alpha_{A0}$ gewählt. Für eine 1 mm dicke Stahlplatte ($E = 200$ GPa, $\nu = 0,3$, $\rho = 7900$ kg/m³) an Wasser ($c_f = 1480$ m/s, $\rho = 1000$ kg/m³) ergibt sich entsprechend (9) der reflektierte Druck $p_r(x)$ wie in Abb. 3 gezeigt.

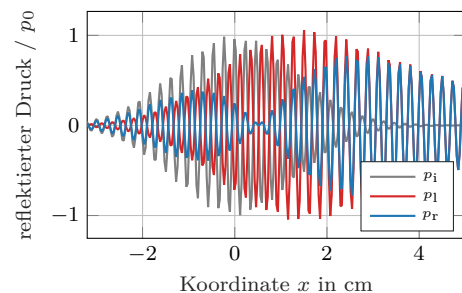
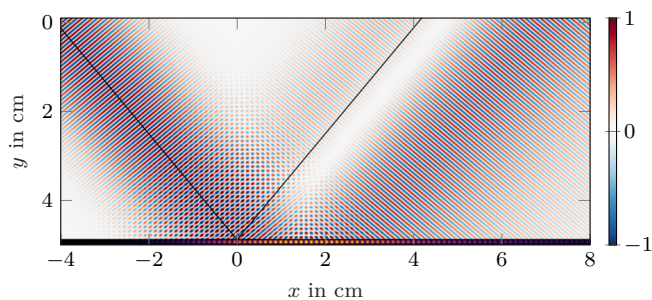


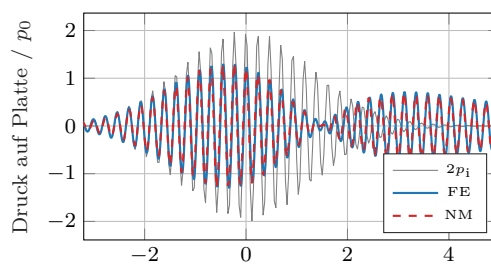
Abbildung 3: Reflektierter Druck

Der reflektierte Druck entsteht aus der Superposition des schallhart reflektierten Drucks $p_i(x)$ und dem abgestrahlten Druck p_l , welche auch in Abb. 3 gezeigt sind. Sie sind zueinander 180° phasengedreht [7]. Anfangs ($x \ll 0$) dominiert die schallharte Reflexion und p_r ist in Phase hierzu. An einem bestimmten Punkt löschen sich p_i und p_l aus, was als Nulldurchgang der Einhüllenden $|p_r|$ erkennbar ist. Danach dominiert das Feld der abstrahlenden Lambwellen p_l und p_r ist entsprechend hierzu in Phase.

Obiges zeigt, dass eine nicht-spiegelnde Reflexion als *Interferenz zwischen spiegelnder Reflexion und dem von Lambwellen abgestrahlten Feld* zu verstehen ist. Die anfangs genannten Eigenschaften der nicht-spiegelnden Reflexion sind in Abb. 3 und 4a erkennbar: (i) Verbreiterung des Strahls; (ii) ein Auslöschungspunkt und (iii) eine Verschiebung des Maximums. Wie ausgeprägt diese Effekte sind, hängt insbesondere vom αw -Produkt

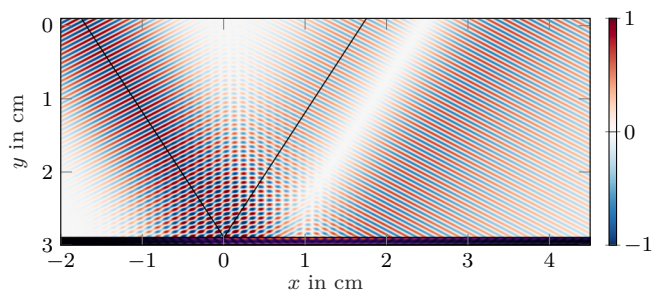


(a) FE-Simulation

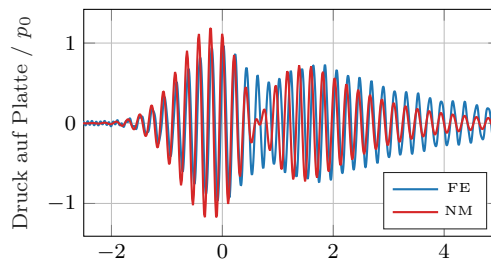


(b) Druck an der Plattenoberfläche

Abbildung 4: Stahlplatte an Wasser: Vergleich zwischen FE-Simulation und der hier präsentierten modalen Berechnung mittels der NM-Theorie (Gauß-Strahl, 1 MHz mm, $\alpha_{A0}w = 0,4$, $\theta = 39,9^\circ$).



(a) FE-Simulation



(b) Druck an der Plattenoberfläche

Abbildung 5: Plexiglasplatte an Wasser: Die geführte Welle interagiert stark mit dem angrenzenden Fluid, weshalb α_n nicht korrekt abgeschätzt wird (Gauß-Strahl, 1,4 MHz mm, $\alpha_{S1}w = 0,5$, $\theta = 29,7^\circ$).

ab [3], also von der Breite w des Strahles bzgl. der e^{-1} -Abklinglänge (inverse der Abklingkonstanten).

Die Berechnung mit der NM-Theorie soll zudem mit einer konventionellen, harmonischen FE-Simulation verglichen werden. Um Reflexionen vom Rand zu vermeiden, wird die Simulationsdomäne dabei über ein Perfectly Matched Layer abgeschlossen. Das Ergebnis in der xy -Ebene ist in Abb. 4a dargestellt. Hierin ist die nicht-spiegelnde Reflexion klar erkennbar.

Ein quantitativer Vergleich zwischen den Ergebnissen der FE-Simulation und der NM-Berechnung zeigt Abb. 4b. Hinsichtlich dessen, dass die NM-Berechnung eine Approximation darstellt (nur eine Mode berücksichtigt, Abklingkonstante α wurde approximiert), ist die hervorragende Übereinstimmung der beiden Berechnungen beachtlich.

Die Methode stößt jedoch an ihre Grenzen, wenn Wellen mit ausgeprägter Fluid-Struktur-Interaktion betrachtet werden sollen. Diese wird in Abb. 5 demonstriert, worin das Ergebnis für die S1-Welle in einer Plexiglasplatte ($E = 6,17$ GPa, $\nu = 0,32$, $\rho = 1190$ kg/m³) an Wasser gezeigt ist. Aufgrund des geringen Impedanzunterschiedes der beiden Materialien und der gewählten Mode findet eine starke Abstrahlung in das Fluid statt, d.h., α_n ist relativ groß. Als Konsequenz wird α_n mittels (7) nicht richtig abgeschätzt. Dies kann in Abb. 5b beobachtet werden, worin das Leckwellen-Feld im Vergleich zur FE-Berechnung zu schnell abklingt.

Berechnung mit Lambleckwellen

Die bisherige Berechnung verwendet die Wellenzahlen und das Geschwindigkeitsfeld von Lambwellen in der freien Platte, bei denen die Energie vollständig in der Platte verbleibt. Dies trifft jedoch üblicherweise nicht auf eine fluidbelastete Platte zu, da hier ein abgestrahltes Wellenfeld auftreten kann. Es sollte in diesem Fall von *quasi-geführten* Wellen gesprochen werden. Jene die in das Fluid abstrahlen werden auch als *Lambleckwellen* bezeichnet. Diese sind die eigentlichen Verursacher der nicht-spiegelnden Reflexion. Deren abgestrahltes Feld wurde im vorherigen Abschnitt mittels Lambwellen lediglich approximiert.

Die quasi-geführten *Lambleckwellen* in der fluidbelasteten Platte lassen sich leicht berechnen [9]. Es wäre also wünschenswert, die Rechnung mit den komplexen Wellenzahlen k'_{xn} und Geschwindigkeitsfeldern v'_{yn} der Lambleckwellen durchzuführen, da diese die analytisch exakte Fluid-Strukturinteraktion berücksichtigen. Dieses Vorgehen hat das Potential die Berechnung deutlich zu vereinfachen, da die Abklingkonstante α_n nicht mehr approximiert werden muss. Stattdessen tritt sie als Imaginärteil der komplexen Wellenzahl $k'_{xn} = \text{Re } k_{xn} + i \text{Im } k_{xn}$ in völlig natürlicher Art und Weise auf und ist exakt bekannt.

Als erste tentative Berechnungsmethodik kann in (6) die Konstante $k_{xn} + i\alpha_n$ durch k'_{xn} ersetzt werden. Dies funktioniert selbstverständlich für den Fall geringer Abstrahlung, da $\alpha_n \approx \text{Im } k'_{xn}$. Allerdings führt dies bei starker Abstrahlung auch nicht zum gewünschten Ergebnis, wie Abb. 6a demonstriert. Zweitens könnte versucht werden,

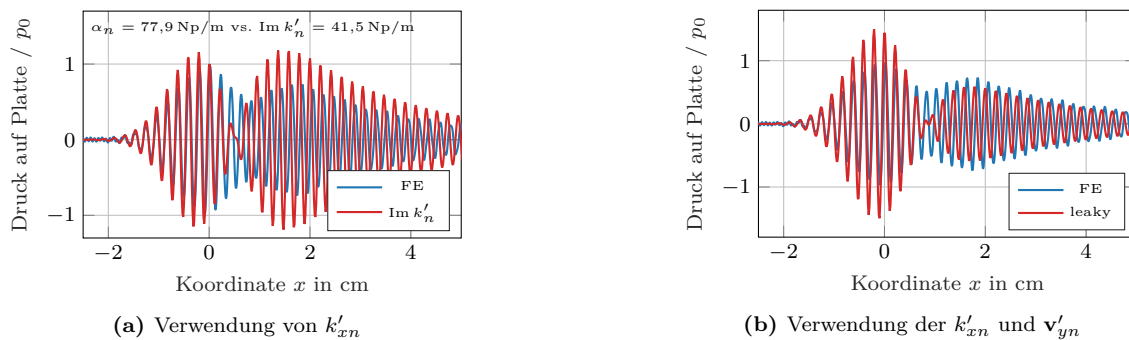


Abbildung 6: Starke Fluid-Struktur-Interaktion: Versuchte Berechnung mittels Leckwelle

auch v_{yn} durch v'_{yn} in der Berechnung zu ersetzen. Dies führt zu dem Ergebnis in Abb. 6b und auch zu keiner Übereinstimmung mit der FE-Lösung. Grund hierfür ist, dass die NM-Theorie für Lambleckwellen nicht in gleicher Form gültig ist und somit auch nicht die Bestimmungsgleichung (4). Somit können momentan die Vorteile der modalen Berechnung hier nicht genutzt werden, nämlich: (i) physikalischer Einblick in das Phänomen und (ii) numerische Effizienz.

Obige Demonstration soll zeigen, dass die Entwicklung einer Quasi-Normalmoden-Theorie (QNM-Theorie) für Lambleckwellen wünschenswert ist. Das Konzept der QNM wird in der Optik, Quantenmechanik und Astrophysik bereits erfolgreich angewandt [10].

Zusammenfassung

Eine Berechnungsmethodik für die nicht-spiegelnde Reflexion mittels der Normalmoden-Theorie von Lambwellen wurde vorgestellt. Die Methode ist einfach zu implementieren und numerisch effizient, da sie das 2d-Wellenfeld durch eine einfache 1d-Integration bestimmt. Diese Modellreduktion ist durch die Annahme ebener Wellen möglich. Die Ergebnisse sind für mäßig stark abstrahlende Lambwellen eine sehr gute Näherung.

Um die Methodik auf stark abstrahlende Wellen zu erweitern, ist die Entwicklung einer Quasi-Normalmoden-Theorie für Lambleckwellen notwendig. Die nicht-spiegelnde Reflexion stellt ein anschauliches Beispiel für die Anwendungsmöglichkeiten einer solchen Theorie dar.

Acknowledgement

Die Autoren sind für die Förderung durch ein DEGA Young Scientist Grant sehr dankbar.

Literatur

- [1] A. Schoch. „Der Durchgang von Ultraschall durch Platten“. In: *Il Nuovo Cimento* 7.2 (1950). DOI: 10.1007/BF02784326.
- [2] A. Schoch. „Der Schalldurchgang durch Platten“. In: *Acta Acustica united with Acustica* 2.1 (1952).
- [3] H. L. Bertoni und T. Tamir. „Unified theory of Rayleigh-angle phenomena for acoustic beams at liquid-solid interfaces“. In: *Applied physics* 2.4 (1973). DOI: 10.1007/BF00884205.
- [4] B. A. Auld. *Acoustic Fields and Waves in Solids*. 2. Aufl. Bd. 2. Krieger Publishing Company, 1990.
- [5] G. S. Kino. *Acoustic Waves: Devices, Imaging, and Analog Signal Processing*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1987.
- [6] X. Jia. „Normal-mode theory of nonspecular phenomena for a finite-aperture ultrasonic beam reflected from layered media“. In: *Applied Physics Letters* 70.3 (1997). DOI: 10.1063/1.118401.
- [7] M. O. Deighton, A. B. Gillespie, R. B. Pike und R. D. Watkins. „Mode conversion of Rayleigh and Lamb waves to compression waves at a metal-liquid interface“. In: *Ultrasonics* 19.6 (1981). DOI: 10.1016/0041-624X(81)90014-7.
- [8] T. A. Driscoll, N. Hale und L. N. Trefethen, Hrsg. *Chebfun guide*. Oxford: Pafnuty Publications, 2014.
- [9] D. A. Kiefer, M. Ponschab, S. J. Rupitsch und M. Mayle. „Calculating the full leaky Lamb wave spectrum with exact fluid interaction“. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 145.6 (2019). DOI: 10.1121/1.5109399.
- [10] E. S. C. Ching, P. T. Leung, A. Maassen van den Brink, W. M. Suen, S. S. Tong und K. Young. „Quasinormal-mode expansion for waves in open systems“. In: *Reviews of Modern Physics* 70.4 (1998). DOI: 10.1103/RevModPhys.70.1545.