

Berechnung der vollständigen Dispersionscharakteristik von abstrahlenden Lambwellen mittels Variablentransformation

Daniel A. Kiefer, Michael Ponschab, Stefan J. Rupitsch

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl für Sensorik, 91052 Erlangen, Deutschland

Email: daniel.kiefer@fau.de

Einleitung

Geführte elastische Wellen in Platten, insbesondere Lambwellen, werden zur zerstörungsfreien Werkstoffprüfung eingesetzt [1]. Auch in der Messtechnik und Sensorik werden sie gezielt genutzt [2]. Für diese Anwendungen ist es notwendig, die frequenzabhängigen Ausbreitungseigenschaften der geführten Wellen zu kennen, welche als Dispersionscharakteristik bezeichnet werden. In der Praxis grenzt die Platte häufig an ein Fluid an. Aufgrund der Interaktion zwischen der Platte und dem Fluid ändern sich die Ausbreitungseigenschaften der geführten Wellen, was für die genannten Anwendungen von zentraler Bedeutung sein kann.

Die sogenannte charakteristische Gleichung beschreibt in impliziter Form den Zusammenhang zwischen Wellenzahl und Frequenz. Aus numerischer Sicht ist es jedoch sinnvoller stattdessen das zugehörige Eigenwertproblem zu lösen. Für *offene Wellenleiter*, wie beispielsweise die fluidbelastete Platte, ist das resultierende Eigenwertproblem jedoch nichtlinear und kann deshalb nicht mit Standardmethoden gelöst werden. In diesem Beitrag wird gezeigt, wie das nichtlineare Eigenwertproblem in ein *äquivalentes lineares Eigenwertproblem* überführt werden kann.

Das Lambleckwellen-Problem

Betrachtet wird eine unendlich ausgedehnte Platte mit einseitig angrenzendem Fluid. Ein Auszug des Querschnitts ist in Abb. 1 gezeigt. Wellen mit Teilchenbewegung in der x - y -Ebene, also in plain-strain, werden in diesem Zusammenhang als *Lambleckwellen* bezeichnet.

Es wird eine harmonische Wellenausbreitung der Form $e^{i(k_x x - \omega t)}$ angenommen, wobei k_x die komplexe Wellenzahl, ω die Kreisfrequenz, t die Zeit und i die imaginäre Einheit bezeichnen. Über die Dickenkoordinate y bildet sich eine stehende Welle aus, welche numerisch diskretisiert wird. Die sich ergebende Modellierung für eine homogene, isotrope, elastische Platte wurde in [3, 4] gezeigt. Für eine bestimmte Frequenz f ergibt sich so das algebraische *nichtlineare Eigenwertproblem* für Lambleckwellen, gegeben durch

$$\underline{F}(k_x)\underline{q} = \underline{0}, \text{ mit } \underline{F}(k_x) = k_x^2 \underline{A}_2 + k_x \underline{A}_1 + \underline{A}_0 + ik_y \underline{B}, \quad (1)$$

$$\text{wobei } k_y = \sqrt{k_f^2 - k_x^2}. \quad (2)$$

Hierin ist die Matrixfunktion $\underline{F}(k_x)$ nichtlinear abhängig von der Wellenzahl k_x . Die Koeffizientenmatrizen \underline{A}_2 , \underline{A}_1 , \underline{A}_0 und \underline{B} entstehen bei der Diskretisierung und sind fre-

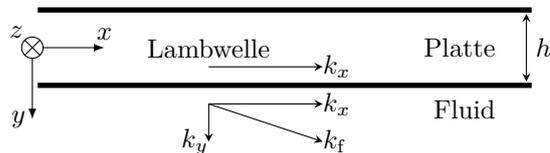


Abbildung 1: Auszug des Querschnitts der unendlich ausgedehnten Platte.

quenzabhängig. Die Fluidwellenzahl $k_f = \omega/c_f$ ist charakteristisch für das Fluid und vorab bekannt. k_y wird als transversale Wellenzahl bezeichnet. Gelöst werden soll nach den Eigenwerten k_x und Eigenvektoren \underline{q} .

Der Zusammenhang (2) zwischen k_x und k_y ist nicht eindeutig, aufgrund der zwei möglichen Lösungen der Wurzelfunktion, und außerdem nicht holomorph. Diese beiden Eigenschaften führen zu zusätzlichen Schwierigkeiten für nichtlineare Eigenwertlöser [5, 6].

Variablentransformation

Durch Einführen einer Variablentransformation kann das Problem in eine *linearisierbare, eindeutige, holomorphe* und *vollständige* Formulierung überführt werden. Hierzu wird die komplexe Variable $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ so definiert, dass

$$k_x = k_f \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2} \quad (3)$$

gilt [7]. Durch Einsetzen in (2) erhält man

$$k_y = \pm k_f \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2i}. \quad (4)$$

Als nächstes wird die Variablentransformation (3) und (4) in die Matrixfunktion $\underline{F}(k_x)$ aus (1) eingesetzt und mit $4\gamma^2$ multipliziert. Je nach Wahl des Vorzeichens in (4) erhält man dabei zwei verschiedene *polynomielle* Matrixfunktionen, nämlich \underline{P}_+ oder \underline{P}_- , welche durch

$$\underline{P}_{\pm}(\gamma) := 4\gamma^2 \underline{F}(k_x(\gamma)) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{k_f^2 \underline{A}_2}_{\underline{P}_4} \gamma^4 + \underbrace{2k_f(\underline{A}_1 \pm \underline{B})}_{\underline{P}_3^{\pm}} \gamma^3 + \underbrace{(4\underline{A}_0 + 2k_f^2 \underline{A}_2)}_{\underline{P}_2} \gamma^2 \\ &\quad + \underbrace{2k_f(\underline{A}_1 \mp \underline{B})}_{\underline{P}_1^{\pm}} \gamma + \underbrace{k_f^2 \underline{A}_2}_{\underline{P}_0} \end{aligned} \quad (6)$$

gegeben sind.

Die beiden Matrixfunktionen $\underline{P}_{\pm}(\gamma)$ sind zwar nicht gleich dem ursprünglichen $\underline{F}(k_x)$ des Lambleckwellen-Problems, trotzdem bestimmt das Spektrum von \underline{P}_{\pm}

vollständig das Spektrum von \underline{F} . Dies ist aus (5) ersichtlich, da \underline{P}_{\pm} genau dann für γ_n singular wird, wenn \underline{F} für $k_x(\gamma_n) = k_f(\gamma_n + \gamma_n^{-1})/2$ singular oder $\gamma_n = 0$ ist. Letzteres führt jedoch auf $k_x \rightarrow \infty$, was nicht weiter interessiert und leicht auszusortieren ist.

Es sei weiter angemerkt, dass die Wahl des Vorzeichens irrelevant ist. Durch Inspektion der Koeffizientenmatrizen wird klar, dass zwischen den beiden Polynommatrizen \underline{P}_{+} und \underline{P}_{-} die Beziehung

$$\underline{P}_{+}(\gamma) = \gamma^4 \underline{P}_{-}(\gamma^{-1}) \quad (7)$$

gilt und somit das Spektrum von \underline{P}_{-} dem invertierten Spektrum von \underline{P}_{+} entspricht. Die unterschiedlichen Eigenwerte γ_n und γ_n^{-1} führen mit (3) aber trotzdem auf die gleichen Wellenzahlen k_{xn} und bei Berücksichtigung der Vorzeichenwahl in (4) auch auf die gleichen transversalen Wellenzahlen k_{yn} . Als Konsequenz ist es ausreichend, die Eigenwerte von entweder \underline{P}_{+} oder \underline{P}_{-} zu bestimmen. Die Eigenschaft, dass zu jeder Lösung k_{xn} *eindeutig* auch eine Lösung k_{yn} bestimmt werden kann, ist dabei eine Besonderheit der vorgestellten Lösungsmethodik.

Ohne Einschränkung wird $\underline{P} = \underline{P}_{+}$ gewählt. Das polynomielle Eigenwertproblem

$$\underline{P}(\gamma)\underline{q} = 0 \quad (8)$$

besitzt eine äquivalente lineare Darstellung in einem höherdimensionalen Zustandsraum [5], welche häufig durch die sogenannten Begleitmatrizen angegeben wird. Nach Transformation in den Zustandsraum kann also ein gewöhnlicher linearer Eigenwertlöser eingesetzt werden, um die Eigenwerte γ zuverlässig und effizient zu berechnen. Die Wellenzahlen k_x ergeben sich anschließend ohne Weiteres aus (3) und k_y aus (4) mit dem positiven Vorzeichen. Die Eigenvektoren \underline{q} bleiben gleich.

Ergebnisse

In dieser Arbeit erfolgt die Diskretisierung mittels spektraler Kollokation [8]. Das polynomielle Eigenwertproblem (8) wird für jede vorgegebene Frequenz f aufgestellt und anschließend in Matlab mithilfe der POLYEIG-Funktion gelöst. Diese basiert auf Linearisierung mittels Begleitmatrix und anschließendem Anwenden des QZ-Algorithmus.

Der Realteil der komplexen Wellenzahlen k_x ergibt die Phasengeschwindigkeit

$$c_p = \frac{\omega}{\text{Re } k_x}. \quad (9)$$

Der Imaginärteil $\text{Im } k_x$ stellt die exponentielle Abschwächung der Mode in x -Richtung dar. Für ausbreitungsfähigen Moden der freien Platte, welche rein reelle Wellenzahlen aufweisen, entspricht dies der Abstrahldämpfung.

Das frequenzabhängige Wellenzahlenspektrum $k_x(f)$ wurde für eine 1 mm dicke Messingplatte ($\lambda = 87$ GPa, $\mu = 41$ GPa, $\rho = 8440$ kg/m³), die einseitig an Wasser

($c_f = 1480$ m/s, $\rho_f = 1000$ kg/m³) angrenzt, berechnet. Das Ergebnis ist als Phasengeschwindigkeit über Frequenz in Abb. 2a gezeigt. Die Farbskala gibt hierin die Dämpfung der Mode an, welche in Abb. 2b explizit dargestellt ist. Im Vergleich zur freien Platte tritt eine zusätzliche Mode auf. Diese nicht gedämpfte Mode wird als Quasi-Scholte Mode (QS) oder A-Mode bezeichnet. Ihre Phasengeschwindigkeit konvergiert für hohe Frequenzen gegen die Longitudinalwellengeschwindigkeit in Wasser. Wie das zugehörige Modenbild in Abb. 3e zeigt, stellt die QS-Mode eine hauptsächlich im Fluid an der Platte entlanglaufende Welle dar, wobei ihre Amplitude exponentiell mit Entfernung zur Platte abklingt.

Es fällt weiterhin auf, dass die A0'-Mode, anders als weitgehend angenommen, auch unterhalb der Koinzidenzfrequenz von 0,43 MHz in das Wasser abstrahlt [9]. Ab einer Frequenz von ca. 0,33 MHz jedoch spaltet sie sich in zwei Moden mit rein reellen Wellenzahl auf [9, 10], die hier als D0 und D1 bezeichnet sind.

Die Modenbilder der A0'- sowie S0'-Moden sind in Abb. 3a und 3b gezeigt. Sie strahlen jeweils unter einem charakteristischen Winkel eine inhomogene ebene Longitudinalwelle in das Fluid ein. Die gleichen Moden sind für eine höhere Frequenz in Abb. 3c und 3d dargestellt. Erstere konvergiert gegen eine Oberflächenwelle an der freien Oberfläche, während zweitere gegen eine Grenzschichtwelle am fluidbelasteten Rand der Platte konvergiert. Konsistent hierzu verhält sich die Abstrahldämpfung der beiden Moden unterschiedlich, wie in Abb. 2b zu sehen ist.

Das Ergebnis einer 1 mm dicken Platte aus Polymethylmethacrylat (PMMA, $\lambda = 4,2$ GPa, $\mu = 2,3$ GPa, $\rho = 1190$ kg/m³), ebenfalls einseitig angrenzend an Wasser, ist in den Dispersionskurven von Abb. 4b zu sehen. Als Gegenüberstellung ist in Abb. 4a die freie PMMA-Platte gezeigt. Aufgrund der ähnlichen Massendichte von PMMA und Wasser ist in den beiden Fällen der Verlauf der Dispersionskurven qualitativ sehr unterschiedlich. Alle Moden der fluidbelasteten Platte transportieren Energie und sind entsprechend ausbreitungsfähig [11]. Der Übersichtlichkeit halber werden deshalb in Abb. 4b nur die Moden gezeigt, deren Energiegeschwindigkeit größer als 5 m/s ist, also hinreichend viel Energietransport aufweisen. Der Kurvenverlauf in Abb. 4b könnte als *vermeidene Kreuzung* zwischen ausbreitungsfähigen und nichtausbreitungsfähigen Moden der freien Platte interpretiert werden.

Zusammenfassung

Es wurden Dispersionseigenschaften von Lambwellen berechnet. Dabei führte eine Variablentransformation auf ein linearisierbares, eindeutig gestelltes Eigenwertproblem. Durch anschließendes Anwenden moderner linearer Eigenwertlöser können zuverlässig alle Moden gefunden werden. Die Methode ist dabei einfacher zu implementieren und effizienter auswertbar im Vergleich zu iterativen nichtlinearen Eigenwertlösern.

Die Methodik lässt sich auf viskoelastische, inhomogene, anisotrope, geschichtete Platten erweitern. Auch ei-

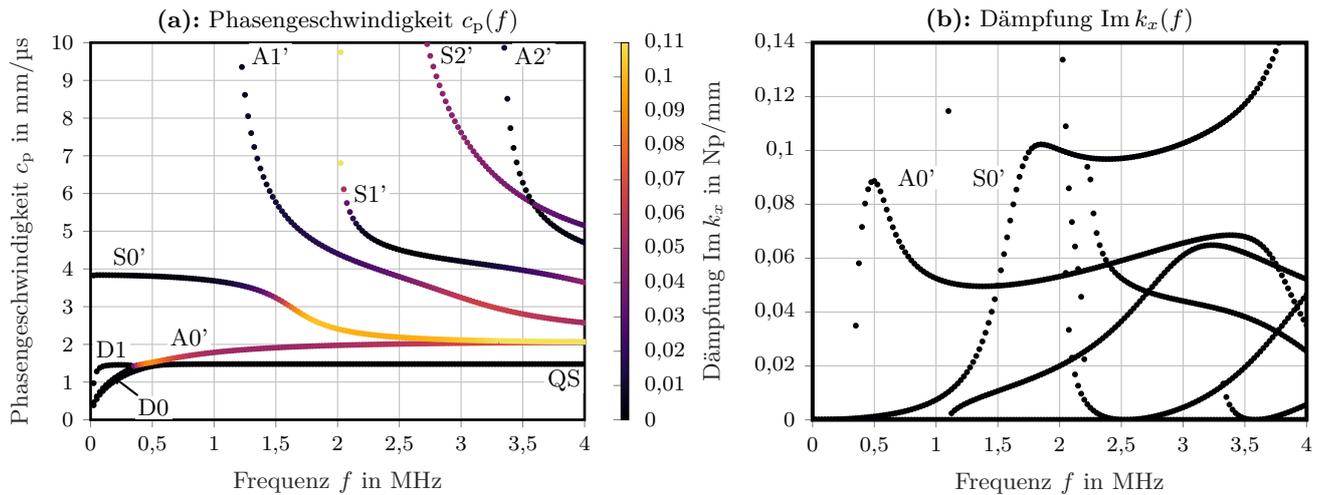
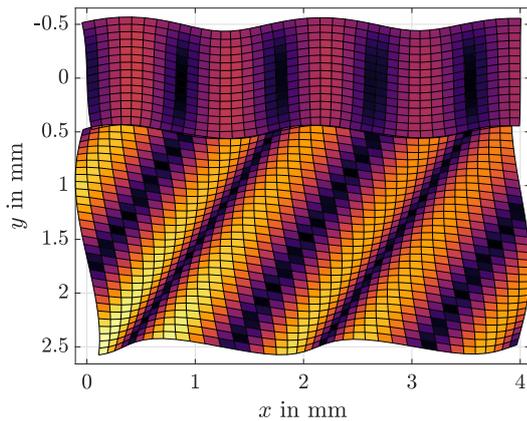
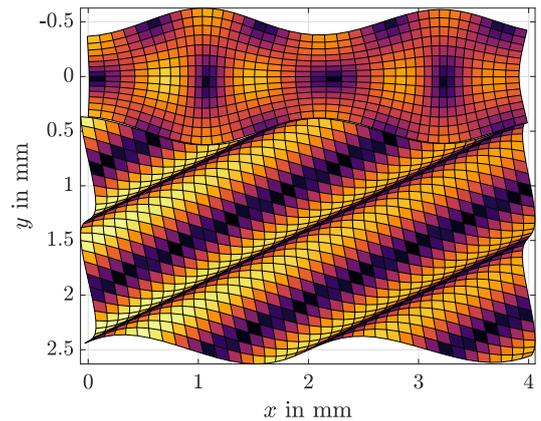


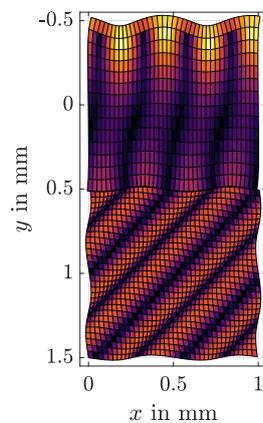
Abbildung 2: 1 mm dicke Messingplatte einseitig angrenzend an Wasser. **(a):** Phasengeschwindigkeit c_p mit farbig dargestellter Abstrahldämpfung $\text{Im } k_x$. Letzteres ist in **(b)** explizit dargestellt.



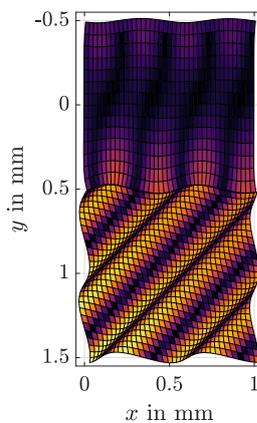
(a) $A0'$ -Mode bei $f = 1$ MHz



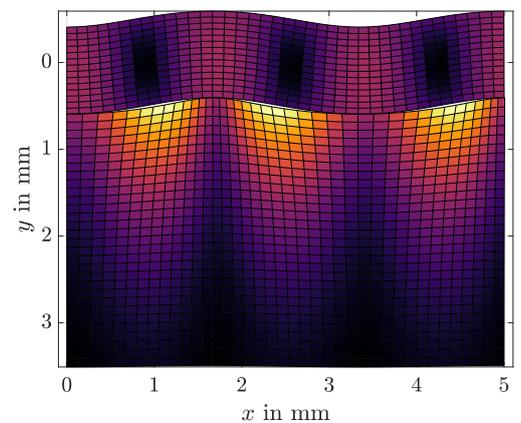
(b) $S0'$ -Mode bei $f = 1,5$ MHz



(c) $A0'$ -Mode bei $f = 4$ MHz



(d) $S0'$ -Mode bei $f = 4$ MHz



(e) QS-Mode bei $f = 0,4$ MHz

Abbildung 3: Modenformen für ausgewählte Punkte auf den Dispersionskurven. Farbskala: Verschiebungsamplitude ist höher, je heller die Farbe.

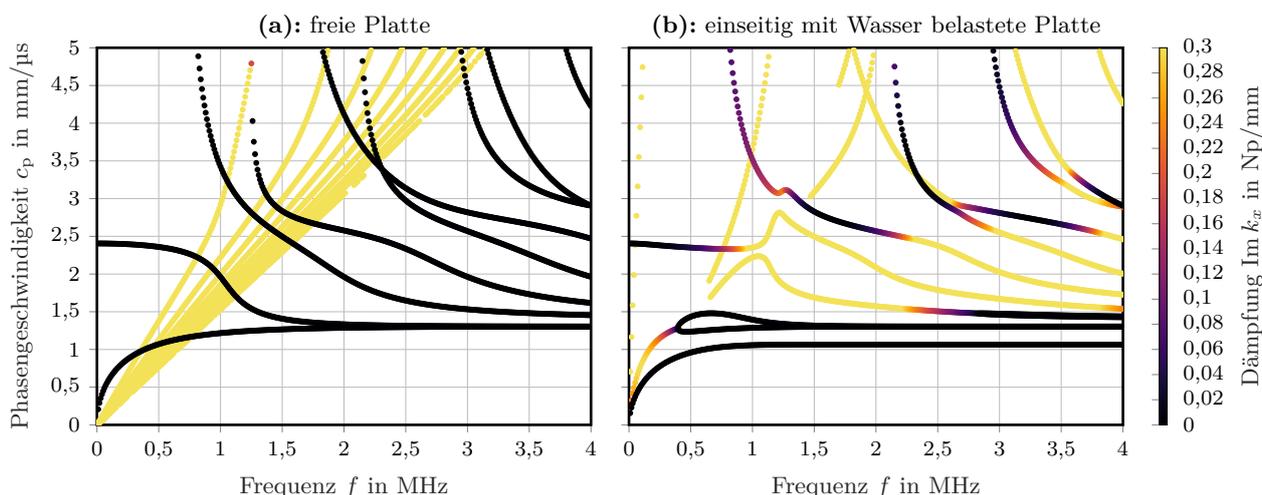


Abbildung 4: Phasengeschwindigkeit und Dämpfung einer 1 mm dicken PMMA-Platte. **(a):** ausbreitungsfähige (schwarz) und nicht-ausbreitungsfähige (gelb) Moden der freien Platte. **(b):** einseitig an Wasser angrenzende Moden mit Energiegeschwindigkeit größer als 5 m/s.

ne beidseitige Belastung mit dem gleichen nicht-viskosem Fluid lässt sich berechnen. Die Variablentransformation ist allerdings für viskose Fluide oder für zwei unterschiedliche angrenzende Fluide ungeeignet.

Literatur

- [1] WILCOX, P. D. ; LOWE, M. J. S. ; CAWLEY, P.: Mode and Transducer Selection for Long Range Lamb Wave Inspection. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 12 (2001), August, Nr. 8, S. 553–565
- [2] LINDNER, Gerhard: Sensors and actuators based on surface acoustic waves propagating along solid–liquid interfaces. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 41 (2008), Nr. 12, S. 123002
- [3] KIEFER, Daniel A. ; PONSCHAB, Michael ; RUPITSCH, Stefan J.: Berechnung der Abstrahldämpfung in ebenen Wellenleitern aufgrund eines angrenzenden Fluids. In: SEEBER, Bernhard (Hrsg.): *Fortschritte der Akustik - DAGA 2018*. München : Deutsche Gesellschaft für Akustik e.V., März 2018. – ISBN 978-3-939296-13-3, S. 1595 – 1598
- [4] KIEFER, Daniel A. ; PONSCHAB, Michael ; MAYLE, Michael ; RUPITSCH, Stefan J.: *Calculating the full leaky Lamb wave spectrum with exact fluid interaction*. Erlangen, Dezember 2018. Zur Veröffentlichung eingereicht.
- [5] MEHRMANN, Volker ; VOSS, Heinrich: Nonlinear eigenvalue problems: a challenge for modern eigenvalue methods. In: *GAMM-Mitteilungen* 27 (2004), Dezember, Nr. 2, S. 121–152
- [6] MAZZOTTI, M. ; BARTOLI, I. ; MARZANI, A. ; VIOLA, E.: A coupled SAFE-2.5D BEM approach for the dispersion analysis of damped leaky guided waves in embedded waveguides of arbitrary cross-section. In: *Ultrasonics* 53 (2013), September, Nr. 7, S. 1227–1241
- [7] HOOD, Amanda: *Localizing the eigenvalues of matrix-valued functions: analysis and applications*. Ithaca, Cornell University, Diss., Januar 2017
- [8] ADAMO, A. T. I. ; CRASTER, R. V.: Spectral methods for modelling guided waves in elastic media. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 116 (2004), September, Nr. 3, S. 1524–1535
- [9] DABIRIKHAH, H. ; TURNER, C. W.: Anomalous behaviour of flexural waves in very thin immersed plates. In: *IEEE 1992 Ultrasonics Symposium Proceedings*, 1992, S. 313–317 vol.1
- [10] DABIRIKHAH, H. ; TURNER, Charles W.: The coupling of the A0 and interface Scholte modes in fluid-loaded plates. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 100 (1996), November, Nr. 5, S. 3442–3445
- [11] SIMONETTI, F. ; LOWE, M. J. S.: On the meaning of Lamb mode nonpropagating branches. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 118 (2005), Juni, Nr. 1, S. 186–192