

# Berechnung der Auswirkung mechanischer Spannungen auf die Ausbreitung von Lamb-Wellen

Michael Ponschab, Daniel A. Kiefer, Stefan J. Rupitsch

*Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl für Sensorik, 91052 Erlangen, Deutschland*

*Email: michael.ponschab@fau.de*

## Einleitung

Entwicklungen in der strukturellen Zustandsüberwachung setzen auf den Einsatz geführter elastischer Wellen zur Detektion von Rissen aber auch zur Überwachung der Eigenspannung der Struktur [1]. Anwendungsmöglichkeiten bestehen beispielsweise in der Überwachung von Brücken und tragenden Strukturen, Schienen, Pipelines und Druckbehältern. Ein wichtiger Baustein der Entwicklung geeigneter Messverfahren ist die Beschreibung vereinfachender Modelle, wie die in diesem Beitrag betrachtete Ausbreitung geführter Wellen in einer freien Platte.

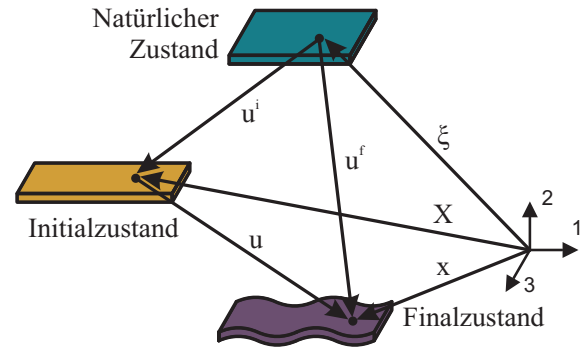
Die lineare Elastodynamik basiert auf der Kontinuumsmechanik der linearen Elastizität nach Cauchy. Ein Material wird hierbei durch die Parameter Dichte, Elastizitätsmodul und Schermodul definiert und die ermittelbaren Schallgeschwindigkeiten sind unabhängig vom Spannungszustand des Mediums. Es bedarf daher einer nichtlinearen Theorie, um die Verformungsauswirkungen auf die Schallgeschwindigkeit abbilden zu können. Der akustoelastische Effekt (AEE) wurde durch Hughes und Kelly 1953 erstmals beschrieben [2]. Die im Folgenden gezeigte analytische Herleitung des AEE folgt einer zu diesem Zweck entstandenen Arbeit der Autoren Pao, Sachse und Fukuoka [3]. Eine aktuelle Aufarbeitung findet sich z.B. in [4].

Der vorliegende Beitrag behandelt eine numerische Modellbildung des AEE bezogen auf geführte Wellen in Platten. Ergebnisse zu Zug- und Biegespannung werden anschließend diskutiert.

## Modellbildung

Die lineare Mechanik geht von infinitesimalen Verformungen aus, weshalb das Koordinatensystem des verformten und unverformten Zustands zusammenfallen. Im nichtlinearen Fall sind allerdings die Koordinatenverschiebungen nicht mehr vernachlässigbar; daher werden drei Koordinatensysteme, wie in Abb. 1 gezeigt, definiert.

Ausganglich befindet sich der Körper in seiner unverformten Lage, welche als *natürlicher Zustand* bezeichnet wird. Externe Krafteinwirkung oder innere mechanische Spannungen führen zur Vorverformung, dem *Initialzustand*. Eine Überlagerung des statischen Initialzustands mit einer dynamischen elastischen Welle führt zum *Finalzustand*. Physikalische Größen können sich auf den Initial- oder Finalzustand beziehen und werden dementsprechend mit einem hochgestellten Index  $i$ , bez.  $f$  versehen. Größen, die sich auf diesen Übergang beziehen, werden hier als *inkrementell* bezeichnet. Gleichzeitig



**Abbildung 1:** Koordinaten und Beziehungen des natürlichen, des Initial- und des Finalzustands.

können die Variablen in den unterschiedlichen Koordinatensystemen dargestellt werden. Für den natürlichen Zustand werden griechische Kleinbuchstaben, für den Initialzustand kleine lateinische Schriftzeichen und für den Finalzustand lateinische Großbuchstaben verwendet. Tensorkomponenten können mit tiefgestellten Indizes dem jeweiligen Koordinatensystem zugeordnet werden. Die Übergänge zwischen den Zuständen findet durch Verschiebungen, die sich aus den Koordinatenvektoren ableiten, statt:

$$u^i(\xi) = X - \xi, \quad u^f(\xi, t) = x - \xi \quad (1)$$

$$u(\xi, t) = x - X = u^f - u^i. \quad (2)$$

Die Nichtlinearität geht an zwei Punkten in die Modellbildung ein, indem statt den linearen Gleichungen auch quadratische Terme berücksichtigt werden: Erstens wird aus den Verschiebungen (2) die Lagrange-Dehnung

$$E_{\alpha\beta}^{i,f} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{\alpha}^{i,f}}{\partial \xi_{\beta}} + \frac{\partial u_{\beta}^{i,f}}{\partial \xi_{\alpha}} + \frac{\partial u_{\gamma}^{i,f}}{\partial \xi_{\alpha}} \frac{\partial u_{\gamma}^{i,f}}{\partial \xi_{\beta}} \right) \quad (3)$$

abgeleitet. Die Differenz  $E_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta}^f - E_{\alpha\beta}^i$  bildet die sog. inkrementelle Dehnung. Zweitens greift die konstitutive Nichtlinearität bei der Bildung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung. Das verwendete hyperelastische Materialmodell enthält nicht nur den Elastizitätstensor der Materialparameter zweiter Ordnung  $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$  im linearen Term, sondern auch den Tensor  $C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta}$  mit Materialparametern dritter Ordnung.

Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung der Dehnung lässt sich mit Hilfe der Cauchy-Dehnung  $e$  die inkrementelle konstitutive Gleichung der mechanisch Spannung

$$T_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta} + C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} e_{\gamma\delta}^i e_{\epsilon\eta}. \quad (4)$$

bilden.

Das Aufteilen in verschiedene Zustände erlaubt es, getrennte Differentialgleichungen für die statische und dynamische Verformungen anzugeben. Das Initialsystem befindet sich in Ruhe, weswegen es durch die stationäre Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left[ T_{\beta\gamma}^i \left( \delta_{\alpha\gamma} + \frac{\partial u_\alpha^i}{\partial \xi_\gamma} \right) \right] = 0 \quad (5)$$

beschrieben wird. Die Variable  $\delta$  ist das Kroneckerdelta. Die resultierenden Verschiebungen der Wellenausbreitung im Finalsistem sind klein. Daher ist die lineare Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left( T_{\beta\alpha}^f + T_{\beta\gamma}^f \frac{\partial u_\alpha^f}{\partial \xi_\gamma} \right) = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha^f}{\partial t^2} \quad (6)$$

ausreichend. Zur Beschreibung des Gesamtsystems wird die Bewegungsgleichung für die inkrementellen Größen benötigt. Diese erhält man aus der Differenz von (6) und (5) unter Verwendung der Beziehungen (4) und (3):

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left[ T_{\gamma\beta}^i \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_\gamma} + \Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \xi_\delta} \right] = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} \quad (7)$$

mit

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta} = c_{\alpha\beta\gamma\delta} + c_{\alpha\beta\rho\delta} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \xi_\rho} + c_{\rho\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\alpha^i}{\partial \xi_\rho} + c_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} e_{\epsilon\eta}^i. \quad (8)$$

Der Ansatz für eine geführte Welle wird als eine ebene, in  $\xi_1$ -Richtung harmonische Welle angenommen, die unabhängig von  $\xi_2$  ist und von  $\xi_3 \in [-h/2, h/2]$  in Dickenrichtung der Platte mit der Dicke  $h$  abhängt:

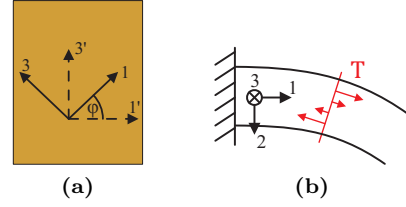
$$u = u(\xi_2) e^{j(k\xi_1 - \omega t)}. \quad (9)$$

Hierbei entspricht  $k$  der Wellenzahl in  $\xi_1$ -Richtung,  $\omega$  der Kreisfrequenz,  $t$  der Zeit und  $j = \sqrt{-1}$ . An den Rändern der freien Platte  $\xi_2 = \pm h/2$  werden die Einträge (2,2), (1,2), (1,3) des Spannungstensors zu Null. Die Gleichungen (7), (4) und (9) beschreiben daher die geführte Wellenausbreitung vollständig.

### Vereinfachung für biaxiale Spannungen

Der Tensor (8) enthält neben der initialen Dehnung  $e^i$  auch Gradienten der Initialverschiebung. Wünschenswert ist eine Vereinfachung der Abhängigkeit vom Initialsystem auf eine einzige Größe, entweder der Initialspannung  $T^i$  oder  $e^i$ . Wegen der Definition der Cauchy-Dehnung und  $\partial u^i / \partial \xi = e^i + r^i$  ist dies nur unter der Voraussetzung möglich, dass die Rotation und Translation  $r^i$  verschwindet oder vernachlässigt wird. Für den Fall reiner biaxialer Initialspannung, das heißt, es treten nur Normalspannungen in der (1,3)-Ebene auf, ist dies gegeben. Es gilt daher  $\partial u^i / \partial \xi = e^i$ .

Abbildung 2(a) zeigt die Koordinatensysteme für eine biaxial vorgespannte Platte. Diese Konfiguration wurde erstmals von Gandhi et al. [4] diskutiert. Die Wellenausbreitung erfolgt in 1-Richtung. Die Initialspannungen in



**Abbildung 2:** Definition der Koordinatensysteme für eine Vereinfachung mit biaxialen Spannungen (a) und Biegespannung (b).

den Richtungen 1' und 3' sind um den Winkel  $\phi$  zur Wellenausbreitung verdreht. Da nur Normalspannungen auftreten, weist die Initialspannung keine Gradienten auf. Daher lässt sich die Bewegungsgleichung unter der Annahme, dass die initialen Spannungen klein sind, zu

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\delta} = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} \quad (10)$$

mit

$$A_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} + C_{\beta\delta\epsilon\eta} e_{\epsilon\eta}^i \delta_{\alpha\gamma} + C_{\alpha\beta\epsilon\delta} e_{\gamma\epsilon}^i + C_{\epsilon\beta\gamma\delta} e_{\alpha\epsilon}^i + C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} e_{\epsilon\eta}^i \quad (11)$$

vereinfachen. Für die inkrementelle Spannung ergibt sich

$$T_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \xi_\delta}, \quad (12)$$

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} + C_{\alpha\beta\epsilon\delta} e_{\gamma\epsilon}^i + C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} e_{\epsilon\eta}^i.$$

### Vereinfachung für Biegespannung

Ein anderer Spannungszustand tritt durch Biegen des Wellenleiters, wie in Abb. 2(b) dargestellt, auf. Die Spannungskomponente  $T_{11}$ , wobei 1 wieder der Ausbreitungsrichtung der geführten Welle entsprechen soll, erhält dabei einen linearen Gradienten über die Dicke. Alle anderen Einträge bleiben Null. Peddetti [5] zeigt ebenfalls Berechnungen für Biegespannungen, vernachlässigt aber, dass die Vereinfachung (7) zu (12) durch die nun auftretenden Gradienten der Initialspannung über die Dicke nicht gültig ist. Es ist allerdings möglich, eine alternative Bewegungsgleichung abzuleiten. Diese lautet

$$D_{\alpha\gamma\delta} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \xi_\delta} + A_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\delta} = \rho^0 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} \quad (13)$$

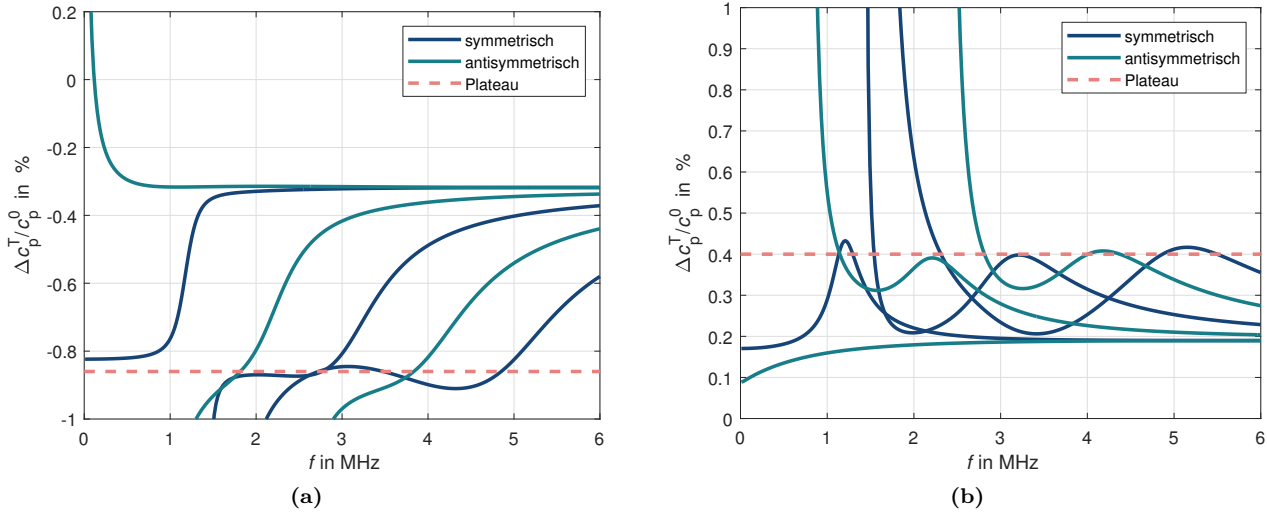
mit einem zusätzlichen Term

$$D_{\alpha\gamma\delta} = \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \left( C_{\delta\beta\epsilon\eta} e_{\epsilon\eta}^i \delta_{\alpha\gamma} + C_{\alpha\beta\epsilon\delta} e_{\gamma\epsilon}^i + C_{\epsilon\beta\gamma\delta} e_{\alpha\epsilon}^i + C_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon\eta} e_{\epsilon\eta}^i \right), \quad (14)$$

der Gradienten der initialen Dehnung enthält. Der Tensor  $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$  ist hierbei abhängig von  $\xi_2$ . Die Rotation und Translation des Körpers wird vernachlässigt.

### Numerische Berechnung

Das Einsetzen des Ansatzes (9) in die Bewegungsgleichungen und Randbedingungen führt zu einem differentiellen Eigenwertproblem. Die sich über die Dicke ausbildende Stehwelle wird mittels der spektralen Kollokationsmethode diskretisiert [6]. Auch Dubuc nutzte dieses



**Abbildung 3:** Relative Phasengeschwindigkeitsänderung bei (a)  $\phi = 0^\circ$  und (b)  $\phi = 90^\circ$  jeweils mit  $|T^i| = 100$  MPa.

Verfahren zur Berechnung des AEE bei geführten Wellen [7]. Die spektrale Kollokation überführt die Differentiation nach der diskretisierten Koordinate in simple Multiplikationen mit einer Differentiationsmatrix  $\mathfrak{D}$ :  $\frac{\partial}{\partial \xi_2} \rightarrow \mathfrak{D}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \rightarrow \mathfrak{D}^2$ . Nach Sortieren der Terme des quadratischen Eigenwertproblems nach den Potenzen der Wellenzahl erhält man das Eigenwertproblem der biaxial gespannten Platte in der Form

$$(k^2 \mathbf{L}_2(T^i) + k \mathbf{L}_1(T^i) + \mathbf{L}_0(T^i) + \rho^0 \omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{u} = 0 \quad (15)$$

und die Randbedingungen:

$$\mathbf{T} = (k \mathbf{M}_1(T^i) + \mathbf{M}_0(T^i)) \mathbf{u} = 0 \quad \text{bei } \xi_2 = \pm \frac{h}{2} \quad (16)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2(T^i) &= -A_{\alpha 1 \beta 1} & \mathbf{L}_1(T^i) &= j(A_{\alpha 1 \beta 3} + A_{\alpha 3 \beta 1}) \mathfrak{D} \\ \mathbf{L}_0(T^i) &= A_{\alpha 3 \beta 3} \mathfrak{D}^2 \\ \mathbf{M}_1(T^i) &= j B_{2 \alpha \beta 1} & \mathbf{M}_0(T^i) &= B_{2 \alpha \beta 2} \mathfrak{D} \end{aligned}$$

für die biaxiale Vereinfachung bzw. für Biegespannungen mit

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1(T^i) &= j(A_{\alpha 1 \beta 3} + A_{\alpha 3 \beta 1}) \mathfrak{D} + j D_{\alpha \beta 1} \\ \mathbf{L}_0(T^i) &= A_{\alpha 3 \beta 3} \mathfrak{D}^2 + D_{\alpha \beta 2} \mathfrak{D}. \end{aligned}$$

Die spektrale Kollokation ermöglicht eine einfache Implementierung mit *MATLAB* in nur wenigen Zeilen Code und eine numerisch exakte Berechnung der Wellenzahlen für einige Hundert Frequenzpunkte in nur wenigen Sekunden [6].

## Ergebnisse

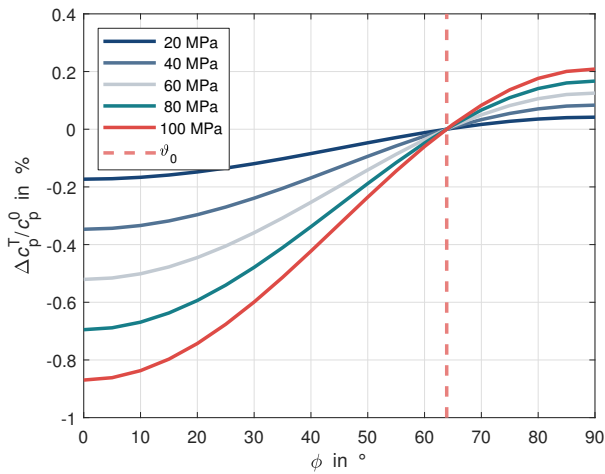
Zur Analyse des AEE wird das Eigenwertproblem für unterschiedliche Frequenzen  $f$  und Initialspannungen  $T^i$  gelöst. Aus den berechneten Wellenzahlen  $k(f, T^i)$  werden die Phasengeschwindigkeiten  $c_p^T$  berechnet. Da der Effekt sehr klein ist, wird die relative Phasengeschwindigkeitsänderung  $\Delta c_p^T / c_p^0 = (c_p^T - c_p^0) / c_p^0$ , bezogen auf die

Phasengeschwindigkeit ohne Vorspannung  $c_p^0$ , betrachtet. Auch relative Gruppengeschwindigkeiten können mit dem gezeigten Modell einfach berechnet werden. Diese sind aber schlechter zu messen und werden hier deshalb nicht untersucht. Alle dargestellten Ergebnisse beziehen sich auf eine isotrope, 2 mm dicke Aluminium 6061-T6 Platte, deren Materialdaten in Tabelle 1 angegeben sind und in der Literatur oft als Beispiel Verwendung finden [4].

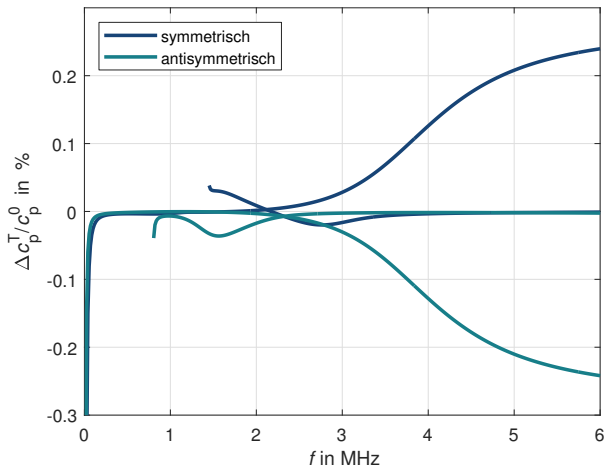
**Tabelle 1:** Materialdaten Aluminium 6061-T6

Lamé (GPa)		Murnaghan (GPa)			Dichte (kg/m <sup>3</sup> )
$\lambda$	$\mu$	$l$	$m$	$n$	$\rho$
54,208	27,174	-281,5	-339	-416	2704

Abbildung 3a zeigt die Auswirkung einer Normalspannung parallel zur Ausbreitungsrichtung. Die Phasengeschwindigkeit verringert sich hierbei bei allen Moden, da die Wellen im vorverformten System im Vergleich zum natürlichen Zustand einen längeren Weg zurückzulegen haben. Der Einfluss der Material-Nichtlinearität verringert diesen Effekt etwas. Den Einfluss von Normalspannungen senkrecht zur Wellenausbreitung enthält Abb. 3b. Der dominante Längungseffekt tritt hier nicht auf, weswegen für alle Moden eine Erhöhung der Phasengeschwindigkeit zu beobachten ist. Bei beiden Abbildungen 3a und 3b entspricht der Betrag der Vorspannung in etwa 40 % der 0,2 %-Dehngrenze. Der Betrag der relativen Phasenänderung bleibt dabei unter einem Prozent. Daher ist es grundsätzlich empfehlenswert bei Messungen von einer absoluten Messung der Phasengeschwindigkeit abzusehen und nur eine relative Änderung bezogen auf den spannungslosen Zustand zu betrachten. Die antisymmetrische Grundmode zeigt für beide Spannungszustände den geringsten Effekt. Alle anderen Moden weisen ein nahezu modenunabhängiges Plateau bei etwa  $\Delta c_p^T / c_p^0 = -0,86$  % bzw.  $\Delta c_p^T / c_p^0 = 0,4$  % auf. Dies könnte ein interessanter Ausgangspunkt für die Wahl möglicher Betriebspunkte eines Sensors sein.



**Abbildung 4:** Relative Phasengeschwindigkeitsänderung der S1-Mode für verschiedene Spannungsbeträge über den Winkel zur Ausbreitungsrichtung;  $f = 2$  MHz.



**Abbildung 5:** Relative Phasengeschwindigkeitsänderung in einem gebogenen Wellenleiter mit  $\max T^i = 200$  MPa. Die Welle breitet sich entlang der Krümmung des Wellenleiters aus.

Die Kurvenschar in Abb. 4 stellt die relative Änderung der Phasengeschwindigkeit der S1-Mode für einen ansteigenden Betrag der Initialspannung über den Winkel zur Ausbreitungsrichtung bei einer konstanten Frequenz dar. Es besteht offensichtlich ein sinusförmiger Zusammenhang zwischen der Änderung von  $c_p$  und dem Winkel  $\phi$ . Außerdem steigt der Betrag der Phasengeschwindigkeitsänderung näherungsweise linear mit der Zunahme des Maximums der Zugspannung an. Für einen moden- und frequenzabhängigen Winkel  $\phi_0$  heben sich die geometrischen und materialbasierten Effekte auf. Im gezeigten Arbeitspunkt beträgt dieser Winkel  $\phi_0 = 63,9^\circ$ .

Deutlich geringere Phasengeschwindigkeitsänderungen entstehen bei einer in Abb. 5 dargestellten Biegung der Platte. Interessant ist allerdings, dass der Effekt auf die Grundmoden mit steigender Frequenz symmetrisch zunimmt. Diese Besonderheit könnte sich zur Messung der Plattenbiegung als vorteilhaft erweisen.

## Zusammenfassung

Der Beitrag zeigt ein Modell zur Berechnung des Akustoelastischen Effekts bei geführten Wellen in Platte. Das Modell wurde für biaxial gespannte Platten und gebogene Platten vereinfacht. Eine Berechnung der Dispersionskurven erfolgte durch eine numerische Diskretisierung des resultierenden Eigenwertproblems. Ergebnisse beider Formen der Vorspannung wurden gezeigt und diskutiert.

Ein großes Problem beim Vergleich von Modell und Messungen stellen fehlende oder ungenaue Materialparameter dritter Ordnung dar. Untersuchungen zeigen, dass diese großen Einfluss auf die erwarteten Phasengeschwindigkeitsänderungen haben. Die Ermittlung dieser Materialkonstanten durch iterative Modellanpassung an Messdaten wird deshalb angestrebt.

## Literatur

- [1] V. Giurgiutiu, *Structural health monitoring: With piezoelectric wafer active sensors*. Academic press, 2007, ISBN: 0080556795.
- [2] D. S. Hughes und J. L. Kelly, „Second-Order Elastic Deformation of Solids“, *Physical Review*, Jg. 92, Nr. 5, S. 1145–1149, 1953.
- [3] Y. H. Pao, W. Sachse und H. Fukuoka, „Acoustoelasticity and Ultrasonic Measurement of Residual Stresses“, *Physical Acoustics*, Nr. XVII, S. 61–142, 1984.
- [4] N. Gandhi, J. E. Michaels und S. J. Lee, „Acoustoelastic Lamb wave propagation in biaxially stressed plates“, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Jg. 132, Nr. 3, S. 1284–1293, 2012.
- [5] K. Peddetti und S. Santhanam, „Dispersion curves for Lamb wave propagation in prestressed plates using a semi-analytical finite element analysis“, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Jg. 143, Nr. 2, S. 829, 2018.
- [6] A. T. I. Adamou und R. V. Craster, „Spectral methods for modelling guided waves in elastic media“, *The Journal of the Acoustical Society of America*, Jg. 116, Nr. 3, S. 1524–1535, 2004.
- [7] B. Dubuc, A. Ebrahimkhanlou und S. Salamone, „A spectral method for computing guided waves in stressed plates and rods“, in *Health Monitoring of Structural and Biological Systems XII*, T. Kundu, Hrsg., SPIE, 2018, S. 70, ISBN: 9781510616967.