

Berechnung der Abstrahldämpfung in ebenen Wellenleitern aufgrund eines angrenzenden Fluids

Daniel A. Kiefer, Michael Ponschab, Stefan J. Rupitsch

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl für Sensorik, 91052 Erlangen, Deutschland

Email: daniel.kiefer@fau.de

Einleitung

Geführte Wellen in Platten, insbesondere Lambwellen, werden zur zerstörungsfreien Werkstoffprüfung eingesetzt sowie in ultraschallbasierten Messsystemen gezielt angeregt und genutzt. Wesentlich für den Entwurf solcher Systeme ist die Kenntnis der Dispersionskurven, die den Zusammenhang zwischen Frequenz und sich ergebenden Wellenzahlen wiedergeben. Obwohl die Rayleigh-Lamb-Gleichungen diesen Zusammenhang analytisch beschreiben, sind numerische Verfahren zur Lösung stets notwendig, da die Gleichungen transzendent sind.

Während klassischerweise ein Nullstellensuchverfahren angewandt wird, wurden neuerdings Verfahren entwickelt, welche auf der Diskretisierung der Bewegungsdifferentialgleichungen beruhen [1, 2]. Diese arbeiten deutlich stabiler und zuverlässiger. Dabei werden die Rayleigh-Lamb-Gleichungen nicht explizit gelöst, sondern der Dispersionszusammenhang auf ein Eigenwertproblem zurückgeführt. Für den Fall der freien Platte kann dieses mit den üblichen numerischen Methoden einfach und effizient gelöst werden.

In der Praxis grenzt jedoch oft ein Fluid an die Platte an. Eine Lambwelle gibt dann Energie an die Umgebung ab, was für viele Anwendungsfälle kritisch ist. Die Lambwelle erfährt dadurch eine Abstrahldämpfung, welche durch den Imaginärteil der Wellenzahl beschrieben wird. Die Randbedingungen für die Platte führen in diesem Fall zu einem nichtlinearen Eigenwertproblem, für das kein etabliertes Lösungsverfahren existiert. In diesem Beitrag wird eine Lösungsmethodik im Sinne einer Fixpunktiteration präsentiert sowie Ergebnisse vorgestellt.

Lambwellen

Obwohl die im Folgenden gezeigten Methoden insbesondere auch für anisotrope, inhomogene, viskoelastische Platten entwickelt wurden [1, 2], wird hier eine homogene, isotrope, linear-elastische Platte betrachtet. Die Geometrie und die Wahl des Koordinatensystems geht aus Abb. 1 hervor, wobei die geführte Wellenausbreitung ohne Einschränkung der Allgemeinheit in x -Richtung stattfinden soll. In diesem Fall entkoppeln die Bewegungsgleichungen geführter Wellen in der Platte mit mechanischen Verschiebungen in z -Richtung von denen in der x - y -Ebene. Ausschließlich Letztere sind in der Lage, Energie an ihre Umgebung abzustrahlen und werden als Lambwellen bezeichnet. Diese werden im Weiteren betrachtet.

Die Verschiebungen \vec{u} in der x - y -Ebene lassen sich als

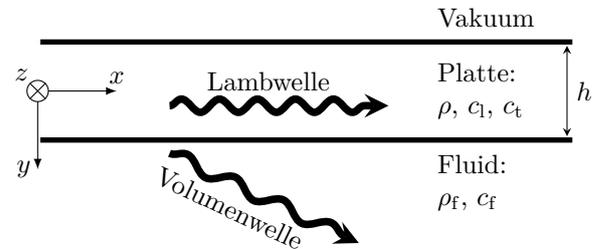


Abbildung 1: Querschnitt der unendlich ausgedehnten Platte.

Helmholtzzerlegung in der Form

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix} = \nabla \varphi(x, y, t) + \nabla \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi(x, y, t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

für die Platte und als

$$\vec{u}_f = \begin{bmatrix} u_{fx} \\ u_{fy} \\ 0 \end{bmatrix} = \nabla \varphi_f(x, y, t) \quad (2)$$

im Fluid darstellen. Hierin bezeichnen φ und φ_f die skalare Longitudinalwellenpotentiale der Platte und des Fluids, während Ψ die z -Komponente des Transversalwellenpotentials der Platte ist. Für eine harmonische Wellenausbreitung in x -Richtung lautet der Ansatz der Potentiale

$$\varphi(x, y, t) := \varphi(y) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (3a)$$

$$\Psi(x, y, t) := i\Psi(y) e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (3b)$$

$$\varphi_f(x, \bar{y}, t) := A e^{i\sqrt{k_f^2 - k_x^2} \bar{y}} e^{i(k_x x - \omega t)}, \quad (3c)$$

wobei k_x die Lambwellenzahl, $k_f = \omega/c_f$ die Wellenzahl des Fluids, $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz und t die Zeit darstellen. Der Faktor $i = \sqrt{-1}$ im Transversalwellenpotential wurde rein aus Zweckmäßigkeit gewählt, da sich für die freie Platte hiermit eine rein reelle Problembeschreibung ergibt. Wie aus (3) hervorgeht, bildet sich über die Plattendicke eine stehende Welle aus, welche als Modenform $[\varphi(y), \Psi(y), A]^T$ bezeichnet wird. Die komplexe Amplitude $A = \bar{A} e^{i\sqrt{k_f^2 - k_x^2} \frac{h}{2}}$ des Verschiebungspotentials im Fluid berücksichtigt die Koordinatenverschiebung $y = \bar{y} + h/2$ an die Grenzfläche zum Fluid für eine Platte der Dicke h .

Die Bewegungsdifferentialgleichungen sind mit diesen Ansätzen sowie der Longitudinalwellengeschwindigkeit c_l

und Transversalwellengeschwindigkeit c_t des Materials durch

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_t^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c_t^2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(y) \\ \Psi(y) \\ A \end{bmatrix} \\ & = k_x^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(y) \\ \Psi(y) \\ A \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

gegeben.

Zusätzlich kommen die beiden Randbedingungen für die Normalspannung σ_{yy} und die Schubspannung σ_{xy} am freien Rand der Platte sowie die drei Übergangsbedingungen zwischen Platte und Fluid an der belasteten Grenzfläche hinzu. Mit dem akustischen Druck p_f im Fluid und den Lamé-Konstanten λ und μ sind diese jeweils durch

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yy}(y)/\mu \\ -2i\sigma_{xy}(y)/\mu \end{bmatrix}_{y=-h/2} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yy}(y)/\mu + p_f(\bar{y})/\mu \\ -2i\sigma_{xy}(y)/\mu \\ u_y(y) - u_{fy}(\bar{y}) \end{bmatrix}_{y=h/2} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

gegeben. Die Normierung der Spannungen auf die zweite Lamé-Konstante μ bzw. auf $-\mu/2i$ erfolgt aus numerischen Gründen. Die Bedingung für die Schubspannung wird damit auch rein reell. Der akustische Druck im Fluid kann als

$$p_f(\bar{y})|_{\bar{y}=0} = \rho_f \omega^2 \quad (7)$$

und das Verschiebungsfeld als

$$u_{fy}(\bar{y})|_{\bar{y}=0} = i\sqrt{k_f^2 - k_x^2} A \quad (8)$$

berechnet werden. Dabei ist ρ_f die Massendichte des Fluides.

In Abhängigkeit der Unbekannten $[\varphi, \Psi, A]^T$ kann (5) als

$$\begin{aligned} & \left(k_x^2 \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + k_x \begin{bmatrix} 0 & 2\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 2\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \varphi(y) \\ \Psi(y) \\ A \end{bmatrix}_{y=-\frac{h}{2}} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

geschrieben werden. Entsprechend ergibt sich für die Kontinuitätsbedingungen aus (6)

$$\begin{aligned} & \left(k_x^2 \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + k_x \begin{bmatrix} 0 & 2\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 2\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} \frac{\lambda+2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & \frac{\rho_f \omega^2}{\mu} \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \sqrt{k_f^2 - k_x^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \varphi(y) \\ \Psi(y) \\ A \end{bmatrix}_{y=\frac{h}{2}} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Die Bewegungsgleichungen (4) mit den Randbedingungen (9) und Übergangsbedingungen (10) beschreiben das Problem der fluidbelasteten Platte vollständig. Im Vergleich zur freien Platte wurde dieses Gleichungssystem lediglich um den skalaren Freiheitsgrad A und eine zusätzliche Gleichung in (6) erweitert. Die Modellierung ist dementsprechend elegant und berücksichtigt die analytisch exakte Belastung der Platte durch das Fluid.

Das Problem kann für eine bestimmte Kreisfrequenz ω als ein differentielles Eigenwertproblem (EWP) mit dem Eigenwert k_x und den Eigenvektoren $[\varphi(y), \Psi(y), A]^T$ interpretiert werden. Die Lösung für den Eigenwert k_x ist demnach frequenzabhängig. Der Zusammenhang $k_x(\omega)$ wird als Dispersionskurve bezeichnet und kann für Lambwellen nur in impliziter Form $F(k_x, \omega) = 0$ angegeben werden, der sogenannten *charakteristischen Gleichung*.

Diskretisierung

Das differentielle EWP ist kontinuierlich in der Koordinate y . Durch Diskretisierung kann dieses in ein algebraisches EWP überführt werden, um anschließend die diskrete Näherungslösung rechnergestützt zu bestimmen. Es gibt mehrere Möglichkeiten zur Diskretisierung der Differentialgleichungen. Sehr elegant und gut geeignet ist die sogenannte *Spektrale Kollokationsmethode* [3], welche für das Problem der freien Platte bereits erfolgreich eingesetzt wurde [2]. Das grundlegende Prinzip wird kurz skizziert und anschließend auf das Problem der fluidbelasteten Platte angewandt.

Spektrale Methoden approximieren die Funktionen $\varphi(y)$ und $\Psi(y)$ mit einer globalen Interpolationsfunktion, d. h. auf der gesamten Domäne, im vorliegenden Fall $y \in [-h/2, h/2]$. Die Interpolationsfunktion stimmt an den N Kollokationspunkten y_i , $i = 1 \dots N \in \mathbb{N}^+$, mit der anzunähernden Funktion überein. Mithilfe der Interpolationsfunktion und den Stützstellen kann der Ableitungsoperator $\frac{\partial}{\partial y}$ näherungsweise als $N \times N$ -Matrix $\underline{\underline{D}}_y$ dargestellt werden. Die *Differentiationsmatrix* $\underline{\underline{D}}_y$ lässt sich vorab berechnen und erfüllt

$$\underline{\underline{D}}_y' [y_i] := \underline{\underline{D}}_y \cdot \underline{\underline{\varphi}}[y_i] = \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} \Big|_{y=y_i}, \quad (11)$$

wobei $\underline{\underline{\varphi}}[y_i]$ den Vektor der Abtastwerte $\varphi(y_i)$ an den Kollokationspunkten bezeichnet und die rechte Seite als Vektor der Ableitungswerte an allen y_i zu verstehen ist.

Als Interpolationsfunktionen kommen Chebyshev-Polynome zum Einsatz. Die Nullstellen dienen als Kollokationspunkte y_i , welche als Chebyshev-Punkte bezeichnet werden. Diese häufen sich an den Rändern der Domäne und können das Problem des Runge-Phänomens vermeiden [4]. Lösungen der Spektralen Kollokationsmethode können für steigende Diskretisierungsordnung N sehr schnell konvergieren. Im Gegensatz zur Finiten Elemente Methode, welche polynomielle Konvergenz aufweist, erzielt man mit der Spektralen Kollokation für hinreichend stetige Lösungen exponentielle Konvergenz. Diese Eigenschaft wird als spektrale Genauigkeit

bezeichnet [3] und ermöglicht das Ausnutzen der Maschinengenauigkeit bei bereits moderaten N . Dieses positive Verhalten wird durch vollbesetzte Matrizen in Kauf genommen.

Eine diskrete Form der Gleichungen (4), (9) und (10) erhält man, indem die Eigenvektoren durch $[\varphi(y), \Psi(y), A]^T \mapsto [\underline{\varphi}^T, \underline{\Psi}^T, A]^T$, alle konstanten Elemente γ der Matrizen durch $\gamma \mapsto \gamma \underline{I}$ sowie die Differentialoperatoren durch $\frac{\partial}{\partial y} \mapsto \underline{D}_y$ und $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \mapsto \underline{D}_{yy}$ ersetzt werden, wobei \underline{I} die $N \times N$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Mit diesem Vorgehen weist das diskretisierte Problem die gleiche Struktur wie zuvor auf. Anschließend werden die Bewegungsgleichungen und die Randbedingungen zusammengeführt. In der diskretisierten Form von (4) stellen die Zeilen 1, N , $N + 1$ und $2N$ die Gleichungen für $y = \pm h/2$ dar und können durch die entsprechenden Gleichungen der Randbedingungen ersetzt werden. Das Gleichungssystem wird zusätzlich durch die übrigbleibende Randbedingung erweitert, z. B. die letzte Zeile von (10), wodurch sich letztendlich Matrizen der Dimension $M \times M$ mit $M = 2N + 1$ ergeben. Abkürzend werden im Folgenden die resultierenden Matrizen als $\underline{A}_2, \underline{A}_1, \underline{A}_0$ und \underline{B} bezeichnet sowie $\underline{p} = [\underline{\varphi}^T, \underline{\Psi}^T, A]^T$ gesetzt.

Sortiert nach Abhängigkeiten von k_x ergibt sich ein algebraisches nichtlineares Eigenwertproblem der Form

$$\underbrace{(k_x^2 \underline{A}_2 + k_x \underline{A}_1 + \underline{A}_0)}_{\underline{P}(k_x)} + \underbrace{\sqrt{k_f^2 - k_x^2} \underline{B}}_{f(k_x)} \cdot \underline{p} = \underline{0}. \quad (12)$$

Hierin ist $k_x \in \mathbb{C}$ der Eigenwert, $\underline{p} \in \mathbb{C}^M$ der Eigenvektor und $k_f \in \mathbb{R}^+$ eine bekannte Konstante.

Lösungsmethodik

Den Fall der freien Platte erhält man durch Eliminieren der letzten Zeile und Spalte aller Matrizen und führt zu einem quadratischen EWP analog zu $\underline{P}(k_x)$. Ein solches Problem lässt sich durch eine Koordinatentransformation in ein lineares verallgemeinertes EWP überführen und anschließend mit den herkömmlichen Methoden der numerischen linearen Algebra lösen. Für die fluidbelastete Platte kommt ein Term der Form $f(k_x) \underline{B}$ hinzu und unterscheidet sich somit grundlegend vom Fall der freien Platte. Aus physikalischer Sicht ist dies evident, denn im Gegensatz zur freien Platte kann die belastete Platte Energie an ihre Umgebung abgeben. Im Allgemeinen müssen die Wellenzahlen k_x daher echt komplex sein.

Eine Koordinatentransformation, die das nichtlineare EWP (12) auf ein lineares zurückführt, ist nicht bekannt. Deshalb muss ein geeignetes Verfahren gewählt werden, um das Problem direkt zu lösen. Solche Methoden sind in der angewandten Mathematik Gegenstand aktueller Forschung [5].

In diesem Beitrag wird der Ansatz einer Fixpunktiteration gewählt. Man stellt fest, dass sich das EWP (12) für

den ν -ten Eigenwert durch

$$[(k_{x\nu}^j)^2 \underline{A}_2 + k_{x\nu}^j \underline{A}_1 + \underbrace{\underline{A}_0(f) + \sqrt{k_f^2 - (k_{x\nu}^{j-1})^2} \underline{B}}_{\text{konst.}}] \cdot \underline{p}_\nu^j = \underline{0}, \quad (13)$$

annähern lässt, wenn $k_{x\nu}^{j-1}$ geeignet gewählt wird. Somit ist der letzte Term konstant. Dies ergibt wieder ein quadratisches EWP und kann, wie bereits beschrieben, mit den Standardmethoden gelöst werden. Die so ermittelte Lösung für $k_{x\nu}^j$ kann iterativ für $k_{x\nu}^{j-1}$ eingesetzt werden, wodurch $k_{x\nu}^j \rightarrow k_{x\nu}$ für $j \rightarrow \infty$ zu erwarten ist. Gleichzeitig sollte $\underline{p}_\nu^j \rightarrow \underline{p}_\nu$ streben.

Einen guten Startwert für die vorgeschlagene Fixpunktiteration stellt die Wellenzahl $k_{x\nu 0}$ der freien Platte dar. Die Iterationsvorschrift (13) muss für jeden Punkt $(k_{x\nu 0}, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der Dispersionskurve der freien Platte durchgeführt werden. Letztendlich erhält man eine vollständige Dispersionskurve der fluidbelasteten Platte in $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$. Der sich ergebende Algorithmus ist:

Algorithm 1 Fixpunktiteration

- 1: $k_{x\nu}^0 \leftarrow k_{x\nu}$ der freien Platte, $j \leftarrow 0$
 - 2: **while** Konvergenzkriterium nicht erfüllt **do**
 - 3: Löse: $(\kappa_i^2 \underline{A}_2 + \kappa_i \underline{A}_1 + \underbrace{\underline{A}_0(f) + \sqrt{k_f^2 - (\kappa_i^j)^2} \underline{B}}_{\text{konst.}}) \cdot \underline{\pi}_i = \underline{0}$
 - 4: $k_{x\nu}^{j+1} \leftarrow \min_i(\kappa_i - k_{x\nu}^j)$, $\underline{p}_\nu^{j+1} \leftarrow \underline{\pi}_i$
 - 5: $j \leftarrow j + 1$
 - 6: **end while**
-

Zusätzlich kann mit der getroffenen Vereinfachung das Gleichungssystem weiter reduziert werden. Da $f(k_{x\nu}^{j-1})$ bekannt ist, lässt sich die letzte Gleichung nach der Unbekannten A auflösen und anschließend in Zeile N von \underline{A}_0 einsetzen. Somit kann die letzte Zeile und letzte Spalte der Matrizen gestrichen werden.

Ergebnisse

Das beschriebene Verfahren wurde in Matlab implementiert. Die Differentiationsmatrizen wurden mit der *Differentiation Matrix Suite* von Weideman und Reddy erstellt [6]. An dieser Stelle werden die Ergebnisse in Abhängigkeit vom Frequenz-Dicken-Produkt fh für eine Messingplatte mit angrenzendem Wasser-Halbraum gezeigt.

Die Abstrahldämpfung, also $\text{Im } k_x$, ist in Abb. 2 zu sehen. Wie zu erwarten, ist diese stark moden- und frequenzabhängig. Während sich Moden in einer freien elastischen Platte ungedämpft ausbreiten, können diejenigen der belasteten Platte ihre Energie gegebenenfalls nach wenigen Zentimetern fast vollständig an die Umgebung abgeben. Das Berücksichtigen der exakten Fluidbelastung durch iteratives Lösen ist insbesondere für den Koinzidenzbereich der A0-Mode bei $fh = 0,5 \text{ mm MHz}$ wichtig. Ansonsten liefert der erste Iterationsschritt bereits eine gute Lösung.

Der Realteil der Wellenzahl ist in Abb. 3 als Phasengeschwindigkeit $c_{\text{ph}} = \omega / \text{Re } k_x$ dargestellt. Der Bereich der

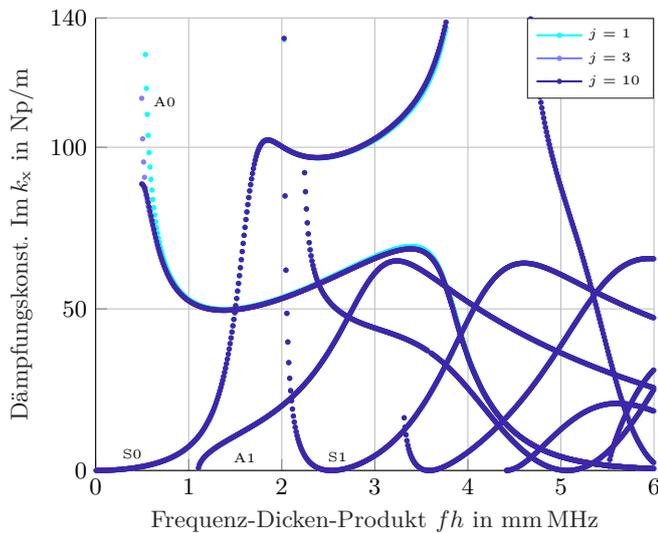


Abbildung 2: Abstrahl­dämpfung ausbreitungsfähiger Moden einer Messingplatte mit einseitig angrenzendem Wasser: Für die entsprechenden Moden der freien, elastischen Platte ist die Dämpfungskonstante stets Null. j ist der Iterations­schritt.

Koinzidenz ist als Ausschnitt in Abb. 4 zu sehen. Es ist bekannt, dass die einseitig fluidbelastete Platte im Vergleich zur freien Platte eine zusätzliche Mode aufweist [7]. Diese kann mit der hier vorgestellten Lösungsmethodik nicht gefunden werden. Der linke Ast in Abb. 4 ist Teil der sogenannten *A-Mode*, welche gegen die Fluidwellengeschwindigkeit c_f konvergiert. Der rechte Ast hingegen gehört zur *A0-Mode*. Der Lösungsalgorithmus springt beim Durchlaufen der Koinzidenz zwischen den beiden Moden. Da die *A-Mode* nicht abstrahlungsfähig ist, ist sie an dieser Stelle nicht von Interesse.

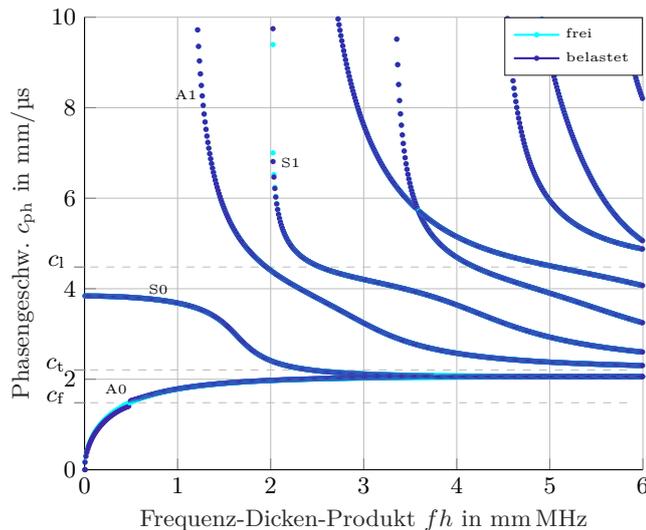


Abbildung 3: Phasengeschwindigkeit ausbreitungsfähiger Moden einer Messingplatte mit einseitig angrenzendem Wasser im Vergleich zur freien Platte.

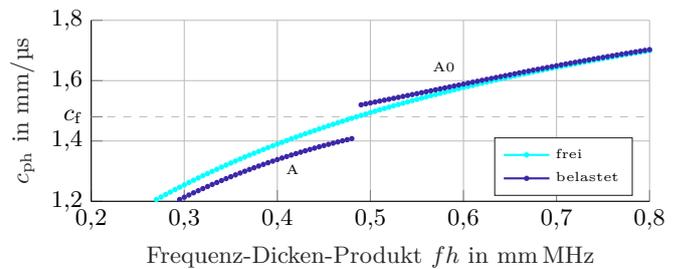


Abbildung 4: Auszug der Phasengeschwindigkeitsdispersion im Bereich der Koinzidenzstelle $c_{ph} \approx c_f$.

Fazit

Klassischerweise werden Dispersionskurven mittels Nullstellensuche der charakteristischen Gleichung ermittelt. In diesem Beitrag werden die Dispersionseigenschaften einer fluidbelasteten Platte durch Lösen eines nichtlinearen Eigenwertproblems bestimmt. Im Gegensatz zur Nullstellensuche findet dieses Verfahren zuverlässig alle Eigenwerte, braucht weder Startwerte noch eine spezielle Behandlung für komplexe Eigenwerte, ist auch für hohe Frequenz-Dicken-Produkte stabil, leicht zu implementieren und schnell. Außerdem können die Modenformen als Eigenvektoren des Problems leicht mitbestimmt werden. Angesichts dieser Vorteile wird das Lösen eines nichtlinearen Eigenwertproblems gerne in Kauf genommen.

Literatur

- [1] ADAMOU, A. T. I. ; CRASTER, R. V.: Spectral methods for modelling guided waves in elastic media. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 116 (2004), Nr. 3, S. 1524–1535
- [2] HERNANDO QUINTANILLA, F. ; LOWE, M. J. S. ; CRASTER, R. V.: Modeling guided elastic waves in generally anisotropic media using a spectral collocation method. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 137 (2015), Nr. 3, S. 1180–1194
- [3] TREFETHEN, Lloyd N.: *Spectral Methods in MATLAB*. Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000. – ISBN 978–0–89871–465–4
- [4] GOURGOULHON, Eric: *An introduction to polynomial interpolation*. Meudon, France, 2005
- [5] MEHRMANN, Volker ; VOSS, Heinrich: Nonlinear eigenvalue problems: a challenge for modern eigenvalue methods. In: *GAMM-Mitteilungen* 27 (2004), Nr. 2, S. 121–152
- [6] WEIDEMAN, J. A. ; REDDY, S. C.: A MATLAB Differentiation Matrix Suite. In: *ACM Trans. Math. Softw.* 26 (2000), Nr. 4, S. 465–519
- [7] ÜBERALL, H. ; HOSTEN, B. ; DESCHAMPS, M. ; GÉRARD, A.: Repulsion of phase-velocity dispersion curves and the nature of plate vibrations. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 96 (1994), Nr. 2, S. 908–917