

BACHELORARBEIT

ANPASSBARKEIT DER EIGENFREQUENZEN VON BALKENSTRUKTUREN FÜR EINEN ENERGY HARVESTER

ausgeführt zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

am

Lehrstuhl für Sensorik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

von

Daniel Kiefer
Turmberg 4
91058 Erlangen

Betreuer:
Dipl.-Ing. Dominik Gedeon

Erlangen, im Mai 2013.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt habe und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Erlangen, 17. Mai 2013

Daniel Kiefer

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
1.1. Motivation: Energy Harvesting	1
1.2. Ziel der Arbeit	1
2. Prinzipieller Aufbau und Vorüberlegungen	3
2.1. Aufbau	3
2.2. Stimmung durch Zentrifugalkräfte	4
2.3. Anregung des Biegebalkens	4
2.4. Vernachlässigung der axialen Gewichtskraft	5
3. Grundlagen	6
3.1. Piezoelektrische Materialien und Wandler	6
3.1.1. Piezoelektrische Materialien	6
3.1.2. Energiedichte und Wirkungsgrad von piezoelektrischen Wandlern	8
3.2. Biegeschwingungen von Balken mit kontinuierlich verteilten Größen . . .	8
3.2.1. Balkentheorie	8
3.2.2. Eigenfrequenzen gleichförmiger Euler-Bernoulli-Balken	10
3.3. Mechanik rotierender Balken	11
3.3.1. Kinematik	11
3.3.2. Bewegungsdifferentialgleichungen für den rotierenden Balken . . .	12
3.3.3. Versteifungs- und Erweichungseffekte	14
3.3.4. Out-of-plane und in-plane Biegeschwingungen	15
3.3.5. Southwellkoeffizienten	17
3.3.6. Instabilitäten	17
3.3.7. Normalspannung im Balken in Folge der axialen Fliehkraft	18
3.3.8. Effekt einer konzentrierten Masse auf die Modencharakteristik . .	22
3.4. Näherungsverfahren	24
3.4.1. Galerkin-Verfahren: Beziehung zwischen Steifigkeitsmatrix der <i>in-</i> <i>plane</i> und <i>out-of-plane</i> Schwingungen	25
3.4.2. Finite Elemente Methode für das mechanische Feld	27
4. Simulation	31
4.1. Modellierung der Geometrie	31
4.2. Erstellen des linearen Gleichungssystems	34
4.3. Iterative Simulation und Visualisierung	36
4.4. Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur	38
5. Simulationsergebnisse	41

6. Zusammenfassung und Ausblick	46
6.1. Zusammenfassung	46
6.2. Ausblick	47
Literaturverzeichnis	49
Abbildungsverzeichnis	50
Tabellenverzeichnis	52
A. Datenblatt PVDF	53

Verwendete Formelzeichen

Symbol	Einheit	Beschreibung
Kennzeichnung		
i, j, k		Laufindizes
$\vec{\bullet}$		Vektor / Voigt-Notation
$\underline{\bullet}$		Vektor der Näherungs-Koeffizienten
$\hat{\bullet}$		Amplitude der Größe \bullet
\bullet^D		Größen bei konstanter dielektrischer Verschiebung \vec{D}
\bullet^E		Größen bei konstanter elektrischer Feldstärke \vec{E}
\bullet^σ		Größen bei konstanter mechanischer Spannung $\vec{\sigma}$
\bullet^S		Größen bei konstanter relativer Dehnung \vec{S}
\bullet_*		Vektor \bullet im (x^*, y^*, z^*) -Koordinatensystem
$\bullet_{op}, \bullet^{op}$		Größe für out-of-plane Schwingung
$\bullet_{ip}, \bullet^{ip}$		Größe für in-plane Schwingung
Operatoren		
\bullet^T		Transponierte von \bullet
\mathcal{B}		Differentialoperator für Voigt-Notation
div		Divergenz
$\bullet' = \frac{\partial \bullet}{\partial x}$		partielle Ableitung nach dem Ort
$\dot{\bullet} = \frac{\partial \bullet}{\partial t}$		partielle Ableitung nach der Zeit
Bezeichnungen		
$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	1	Einheitsvektoren des balkenfesten kartesischen Koordinatensystems
$\vec{e}_{x^*}, \vec{e}_{y^*}, \vec{e}_{z^*}$	1	Einheitsvektoren des kartesischen Inertialsystems
x	m	Koordinate in Richtung \vec{e}_x
t	s	Zeit
r_0	m	radialer Abstand des Einspannpunktes des Balkens zur Rotationsachse
$\delta = \frac{r_0}{L}$	1	normierter Abstand zur Rotationsachse
L	m	Länge des Balkens
$R = r_0 + L$	m	radialer Abstand der Balkenspitze zur Rotationsachse
φ	rad	Winkelposition der Welle
Ω	rad s ⁻¹	Winkelgeschwindigkeit
Ω_b	rad s ⁻¹	Knickgeschwindigkeit
n	s ⁻¹	Drehzahl
h	m	Dicke des Balken

b	m	Breite des Balken
$A = bh$	m ²	Querschnittsfläche des Balken
I_{yy}, I_{zz}	m ⁴	Flächenträgheitsmoment um die y - bzw. z -Achse (Hauptachsen)
l_m	m	Position des Übergangs vom Balken zur Endmasse
$\lambda_m = \frac{l_m}{L}$	1	normierte Position des Übergangs vom Balken zur Endmasse
$\xi = \frac{x}{L}$	1	normierter Positionsparameter in Richtung \vec{e}_x
m	kg	Endmasse (konzentrierte Masse an der Spitze des Balkens)
$\epsilon = \frac{m}{\rho AL}$	1	Massenverhältnis
w	m	Verschiebung (Durchbiegung)
ψ	rad	Winkel zwischen x -Achse und Achse des gebogenen Balkens
q	N m ⁻¹	Streckenlast
N	N	Normalkraft - Schnittkraft im Balken
Q	N	Querkraft - Schnittkraft im Balken
M	N m	Biegemoment - Schnittgröße im Balken
Λ	1	Schlankheitsgrad
\vec{Z}	N	Zentrifugalkraft (Fliehkraft)
\vec{F}	N	Gewichtskraft
\vec{D}	C m ⁻²	dielektrische Verschiebung (1 × 3 - Vektor)
\vec{E}	V m ⁻¹	elektrische Feldstärke (1 × 3 - Vektor)
s	1	Tensor der relativen Dehnung
\vec{S}	1	relativen Dehnung in Voigt-Notation (1 × 6 - Vektor)
s_{xx}	1	Längsdehnung des Balken
σ	N m ⁻²	Cauchy-Spannungstensor
$\vec{\sigma}$	N m ⁻²	mechanische Spannung in Voigt-Notation (1 × 6 - Vektor)
σ_N	N m ⁻²	Normalspannung im Balken aufgrund von Fliehkraft
σ_b	N m ⁻²	Normalspannung aufgrund von Biegung
ω	s ⁻¹	Eigenkreisfrequenz des Balkens
ω_0	s ⁻¹	Eigenkreisfrequenz des nicht rotierenden Balkens
ω_α	s ⁻¹	Eigenkreisfrequenz des Balkens mit Anstellwinkel α
α	rad	Anstellwinkel
κ	m ⁻¹	Eigenwert des Biegebalken
R_{ot}		Drehmatrix um die y^* -Achse
\vec{r}	m	Ortsvektor
\vec{v}	m s ⁻¹	Geschwindigkeit
T	J	kinetische Energie
Π	J	Formänderungsenergie (elastisches Potential)
W_δ	J	Dissipation
S	1	Southwellkoeffizient
λ	1	asymptotische Steigung der $\omega(\Omega)$ -Kurve
F	s ⁻¹	charakteristische Frequenz
U	V	elektrische Spannung
P	W	Leistung
g	m s ⁻²	Erdbeschleunigung

Materialparameter

$[c]$	N m^{-2}	mechanische Module (6×6 - Matrix)
$[s]$	$\text{m}^2 \text{N}^{-1}$	elastische Module (6×6 - Matrix)
ρ	kg m^{-3}	Massendichte
E	Pa	Elastizitätsmodul
ν	1	Poisson-Zahl
λ_L	Pa	erste Lamé-Konstante
μ_L	Pa	zweite Lamé-Konstante
$[\varepsilon]$	$\text{A s V}^{-1} \text{m}^{-1}$	Permittivität (3×3 - Matrix)
$[d]$	C N^{-1}	piezoelektrische Ladungskonstanten (3×6 - Matrix)
$[d]_t$	C N^{-1}	Transponierte von $[d]$
$[e]$	C m^{-2}	piezoelektrische Kraftkonstanten (3×6 - Matrix)
$[e]_t$	C m^{-2}	Transponierte von $[e]$

Näherungsverfahren

\mathbb{B}		Simulationsdomäne
Γ		Rand von \mathbb{B}
\vec{n}		Normalenvektor auf Γ
\vec{f}_V	N m^{-3}	Volumenkräfte
\vec{u}	m	Verschiebungen
\mathbf{I}	1	Einheitsmatrix
C^n		Menge der n -mal stetig differenzierbaren Funktionen
ϕ_k		Ansatzfunktionen
\mathbf{M}	kg	Massenmatrix (Näherungsverfahren)
\mathbf{K}	kg s^{-2}	dynamische Steifigkeitsmatrix (Näherungsverfahren)
\mathbf{K}^s	kg s^{-2}	Struktursteifigkeitsmatrix (Näherungsverfahren)
\mathbf{K}^N	kg s^{-2}	Steifigkeitsmatrix der dynamischen Versteifung (Näherungsverfahren)
\mathbf{K}^d	kg s^{-2}	Steifigkeitsmatrix der dynamischen Erweichung durch Fliehkraftdivergenz (Näherungsverfahren)

1. Einleitung

1.1. Motivation: Energy Harvesting

Viele Geräte werden in einer Umgebung betrieben, in der Energie in verschiedenen Formen vorhanden ist. Es werden sogenannte *Energy-Harvesting-Systeme* entwickelt, die diese Umgebungsenergie nutzbar machen, um sich selber zu versorgen und somit autark zu arbeiten. Hierzu stellt ein Wandler dem System häufig elektrische Energie zur Verfügung. Dieser wird *Energy-Harvester* oder auch *Energy Scavenger* genannt.

Die Umgebungsenergie kann beispielsweise als Wärme, Vibration, elektromagnetisches Feld, Licht, Wind oder chemische Bindungen vorliegen. Sie kann von Natur aus vorhanden sein oder durch einen technischen Prozess entstehen. Ist Letzteres der Fall, so wird Energie, die ungenutzt bleiben würde, „zurück gewonnen“.

Durch Energy-Harvesting ist ein wartungsfreier Betrieb des Gerätes möglich, da keine Batterien getauscht werden müssen. Energy-Harvester können deshalb als Alternative zu diesen betrachtet werden. Der Vorteil der Wartungsfreiheit kann nur durch Robustheit und Langlebigkeit erzielt werden. Manche Ausführungen können als mikroelektromechanisches System (MEMS) hergestellt werden und sind dadurch wesentlich kleiner und leichter als Batterien.

Ein wichtiges Einsatzgebiet für Energy-Harvester sind Sensornetze [1]. Diese müssen oft autark und in rauer Umgebung operieren. Beispielsweise kann ein Naturgebiet auf Schadstoffe oder Brand überwacht werden oder eine Brücke auf Einsturzgefahr. Weitere Anwendungen finden sich für medizinische Implantate (Herzschrittmacher, Hörgeräte), Unterhaltungselektronik (Fernbedienungen) und Überwachungssysteme (Reifendrucküberwachung).

In den Vereinigten Staaten von Amerika ist das Verbauen von Reifendrucküberwachungssystemen gesetzlich vorgeschrieben. Da sich das Rad mit dem Reifen dreht, in dem Druck gemessen werden soll, ist es nicht möglich, den Sensor kabelgebunden mit Energie zu versorgen. An der Entwicklung von Harvestern für diesen Zweck wird aktiv geforscht. Allerdings stellen die hohen Anforderungen bezüglich Beanspruchbarkeit und Arbeitsbereich eine Herausforderung dar [2].

1.2. Ziel der Arbeit

Ein Vibrations-Energy-Harvester wandelt mechanische Energie, die in Form von Vibrationen vorliegt, in elektrische Energie um. Die übliche Struktur eines solchen Harvesters ist ein einseitig eingespannter Balken, der mit einem piezoelektrischen Material beschichtet wurde. Die Energiewandlung erfolgt durch periodische Biegung des Balkens über den piezoelektrischen Effekt.

Um maximale Ausgangsleistung zu erzielen, sollte ein solcher Energy-Harvester in mechanischer Resonanz betrieben werden. Da die Umgebungsvibrationen im Allgemeinen unbekannt sind und sich mit der Zeit ändern, ist dies schwer zu erfüllen. Durch *Stimmen* des Balkens kann seine Eigenfrequenz angepasst werden, um Resonanz einzustellen.

Es wurden bereits *selbststimmende* Energy-Harvester entworfen. Wang et al.[3] haben beispielsweise einen elektromagnetischen Wandler aufgebaut, der aus einer rotierenden Scheibe mit Pendel besteht. Die Eigenfrequenz des Pendels stimmt stets mit der Drehzahl überein. Auch Gu und Livermore [4] haben einen rotierenden Harvester entwickelt, welcher in Resonanz schwingt. Dieser besteht aus einem Biegebalken mit geringer Biegesteifigkeit, der durch periodische Stöße einen zweiten piezoelektrischen Balken zur freien Schwingung anregt.

Ein Balken, wie er in einem piezoelektrischen Energy-Harvester häufig vorkommt, lässt sich durch eine axiale Kraft stimmen. Die Fliehkraft kann zu diesem Zweck genutzt werden. Baut man das System so aufgebaut, dass der Balken von seinem Eigengewicht angeregt wird, so tritt Resonanz auf, wenn die Eigenfrequenz des Balkens mit der Drehzahl übereinstimmt.

In dieser Arbeit soll das Verhalten der ersten Biegeeigenfrequenz eines rotierenden Balkens bezüglich der Winkelgeschwindigkeit analysiert werden. Insbesondere soll untersucht werden, ob Resonanz für den durch die Fliehkraft gestimmten Energy-Harvester auftreten kann und ob dies über einen weiten Drehzahlbereich möglich ist. Hierzu wird eine Literaturrecherche durchgeführt, analytische Betrachtungen vollzogen und ein Finite-Elemente-Modell eines rotierenden Balkens gebildet. Zum Schluss werden die Ergebnisse der Finiten-Elemente-Simulation zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche weiterführende Arbeiten und Verbesserungsmöglichkeiten gegeben.

2. Prinzipieller Aufbau und Vorüberlegungen

2.1. Aufbau

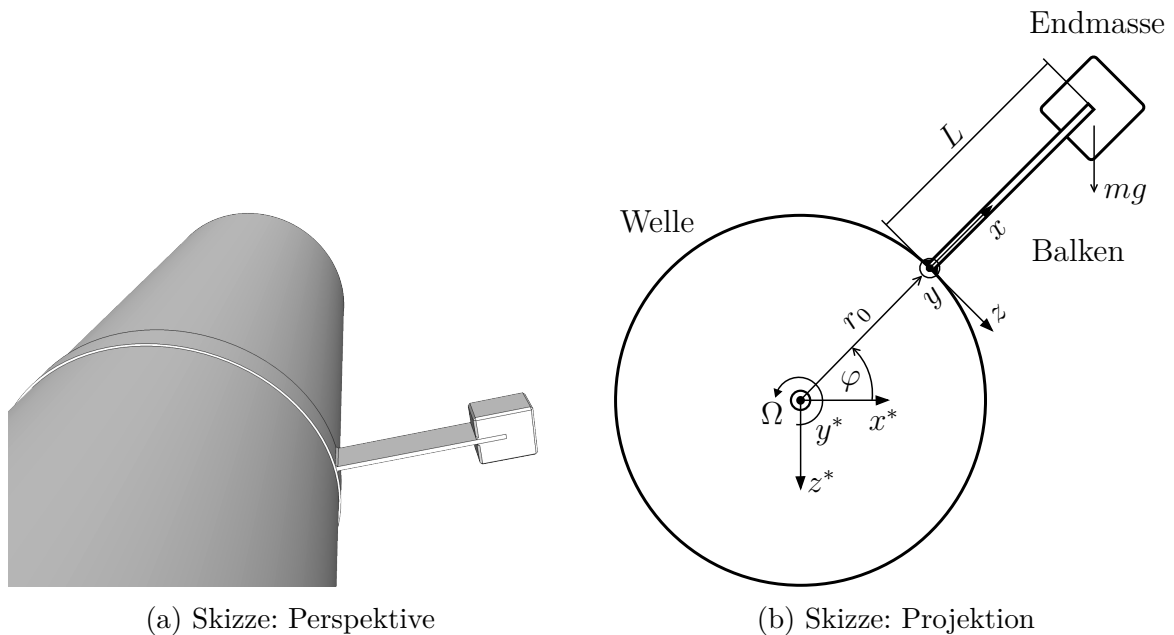


Abbildung 2.1.: Prinzipieller Aufbau: Die Welle mit Radius r_0 rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \dot{\varphi}$. Am piezoelektrischen Biegebalken der Länge L und Dicke h ist eine Endmasse m angebracht. Das (x, y, z) -Koordinatensystem ist balkenfest und rotiert somit. (x^*, y^*, z^*) ist ein Inertialsystem.

Es soll ein Harvester untersucht werden, der einer rotierenden Welle mechanische Energie entzieht und elektrische Energie zur Verfügung stellt. Der prinzipielle Aufbau ist in Abb. 2.1 dargestellt. Die Energiewandlung erfolgt durch einen piezoelektrischen Biegebalken. Dieser ist einseitig so an der Welle eingespannt, dass dessen Längsachse in radiale Richtung zeigt. Am freien Ende des Balkens ist eine Masse angebracht, im Weiteren als „Endmasse“ bezeichnet. Es werden lediglich Wellen betrachtet, die in der horizontalen Ebene liegen, wodurch sich der Balken bei rotierender Welle in einer vertikalen Ebene bewegt und somit im Schwerfeld. Für die in diesem Kapitel präsentierten „Vorüberlegungen“ soll zunächst vereinfachend ein masseloser und längssteifer Balken der Länge L mit einer konzentrierten Masse m an der Spitze betrachtet werden. Die Welle mit Durchmesser $2r_0$ wird im Rahmen dieser Arbeit als starrer Körper angesehen.

2.2. Stimmung durch Zentrifugalkräfte

Bei Rotation tritt eine Zentripetalbeschleunigung auf, aus der sich eine Zentripetalkraft auf die Endmasse ergibt. Im balkenfesten, gleichförmig rotierenden Koordinatensystem (x, y, z) nach Abb. 2.1b ist die Endmasse unbeschleunigt. Die Zentrifugalkraft (Fliehkraft) ist eine Trägheitskraft, die in diesem Koordinatensystem berücksichtigt werden muss um das dynamische Gleichgewicht sicherzustellen. Häufig wird diese als „Scheinkraft“ bezeichnet, da sie in einem Inertialsystem nicht auftritt. Für den undeformierten Balken in Abb. 2.1b ist die *Zentrifugalkraft* \vec{Z} auf die Endmasse m :

$$\vec{Z} = m\dot{\varphi}^2 R\vec{e}_x = m\Omega^2 R\vec{e}_x \quad (2.1)$$

mit $R = r_0 + L$: senkrechter Abstand des Massenschwerpunktes zur Drehachse, $\Omega = 2\pi n = \text{const.}$: Winkelgeschwindigkeit bei Drehzahl n , sowie $\varphi = \Omega t$: Winkel zwischen x^* - und x -Koordinate zum Zeitpunkt t . Siehe Abb. 2.1b.

Diese Kraft zeigt in axiale Richtung des undeformierten Balkens (radiale Richtung im ortsfesten Koordinatensystem x^*, y^*, z^*) und „spannt“ diesen dadurch. Deshalb lässt sich durch dieses einfache Modell eine mit der Fliehkraft F und somit mit der Drehzahl n steigende Eigenfrequenz des Balkens vermuten. Genauere Untersuchungen im Kapitel 3 bestätigen dies für hinreichend niedrige Drehzahlen n .

2.3. Anregung des Biegebalkens

Die Gewichtskraft $\vec{F} = mg\vec{e}_{z^*}$ der Masse weist eine Komponente in Querrichtung des Balkens auf. Diese regt den Balken zur Biegung an.

$$\vec{F}_z = mg \cos(\varphi)\vec{e}_z = mg \cos(\Omega t)\vec{e}_z \quad (2.2)$$

Die Anregung \vec{F}_z hängt von der Winkelposition φ des Balkens ab und ändert sich harmonisch. Es ist ersichtlich, dass die Kreisfrequenz der Anregung die Winkelgeschwindigkeit der Welle ist. Resonanz tritt somit auf, wenn die Eigenkreisfrequenz des Balkens ω mit der Winkelgeschwindigkeit übereinstimmt:

$$\text{Resonanz} \quad \Leftrightarrow \quad \omega = \Omega \quad (2.3)$$

Außerdem weist die Gewichtskraft eine Komponente in axiale Richtung des Balkens auf:

$$\vec{F}_x = -mg \sin(\varphi)\vec{e}_x = -mg \sin(\Omega t)\vec{e}_x \quad (2.4)$$

Diese regt den Balken zur Längsschwingung an. Da die erste Eigenfrequenz eines Balkens in Längsrichtung wesentlich höher ist als in Querrichtung, sind Resonanzerscheinungen bei Erregung nahe der ersten Biegeeigenfrequenz ausgeschlossen. Da außerdem eine hohe Dehnsteifigkeit des Balkens angenommen wird, werden Längsschwingungen im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt.

2.4. Vernachlässigung der axialen Gewichtskraft

Da die Fliehkraft der Endmasse quadratisch mit der Winkelgeschwindigkeit ansteigt, soll im Folgenden angenommen werden, dass die axiale Gewichtskraft \vec{F}_x gegenüber der Fliehkraft \vec{Z} vernachlässigbar ist. Dies ist immer dann der Fall, wenn das Produkt $\Omega^2 R$ hinreichend groß ist:

$$Z = m\Omega^2 R \gg mg \geq F_z = mg \cos(\Omega t) \quad (2.5)$$

$$\Rightarrow \quad \Omega^2 R \gg g \quad (2.6)$$

Die axiale Belastung des Balkens ist also unter dieser Bedingung maßgeblich durch die Zentrifugalkraft \vec{Z} bestimmt.

3. Grundlagen

In diesem Abschnitt sollen, überwiegend anhand von Literaturrecherchen, die nötigen physikalischen Grundlagen dargestellt werden. Zuerst werden piezoelektrische Materialien und der Wirkungsgrad von piezoelektrischen Wandlern betrachtet. Das prinzipielle Schwingungsverhalten nicht rotierender und rotierender Balken wird analytisch untersucht. Abschließend ist in diesem Kapitel ein Überblick zu Näherungsverfahren, einschließlich der Finiten-Elemente-Methode zu finden. Aus den Analysen dieses Kapitels gehen Terme hervor, die für eine Finite-Elemente-Simulation in einem Inertialsystem berücksichtigt werden müssen. Die Simulation wird in Kapitel 4 beschrieben.

3.1. Piezoelektrische Materialien und Wandler

3.1.1. Piezoelektrische Materialien

Bestimmte Dielektrika, sogenannte Ferroelektrika, lassen sich durch einen Polungsprozess mit einem permanenten Dipolmoment versehen [5, S. 43ff.]. Hierdurch entstehen piezoelektrische Materialien, in denen eine Wechselwirkung zwischen dem elektrischen und dem mechanischen Feld zu beobachten ist. Der direkte piezoelektrische Effekt beschreibt die Entstehung einer elektrischen Polarisierung infolge einer mechanischen Verzerrung eines piezoelektrischen Materials. Es kann immer auch umgekehrt durch das Anlegen eines elektrischen Feldes eine Dehnung des Materials hervorgerufen werden, was als inverser oder reziproker piezoelektrischer Effekt bezeichnet wird.

Tritt Polarisierung in Dehnungsrichtung auf, so spricht man vom longitudinalen Effekt, bei Entstehung der Polarisierung in Querrichtung hingegen vom transversalen Effekt. Im Rahmen dieser Arbeit ist der transversale direkte piezoelektrische Effekt von Bedeutung. Piezoelektrizität tritt unter anderem in keramischen oder polymeren Werkstoffen auf. Einige Werkstoffe haben eine besondere technische Bedeutung erlangt. Hierzu gehört Quarz aufgrund seiner hohen Temperaturstabilität, Bleizirkonattitanat (PZT) wegen seinen besonders hohen elektromechanischen Kopplungskoeffizienten und Polyvinylidenfluorid (PVDF) als Kunststoff.

Polyvinylidenfluorid ist ein semikristallines Polymer. Nach Sessler [6] wird durch Ausrichtung der molekularen Dipole in den kristallinen Phasen des Materials die nötige permanente Polarisierung für das piezoelektrische Verhalten erzeugt. Die Temperaturstabilität von PVDF ist sehr beschränkt und die elektromechanische Kopplung vergleichsweise klein. Im Gegensatz zu keramischen Materialien weist PVDF allerdings eine hohe Duktilität, Flexibilität und Robustheit auf, was einen wesentlichen Vorteil darstellen kann. Da außerdem der vergleichsweise geringe Elastizitätsmodul niedrige Eigenfrequenzen der Struktur ermöglicht, ist PVDF für die gestellte Aufgabe als Werkstoff in Betracht zu ziehen.

Um den piezoelektrischen Effekt zu beschreiben, sind die Maxwellgleichungen für das elektrische Feld und die Navierschen Gleichungen für das mechanische Feld erforderlich [7]. Außerdem werden die sogenannten piezoelektrischen Grundgleichungen benötigt. Diese verknüpfen die elektrischen Größen (dielektrische Verschiebung \vec{D} , elektrische Feldstärke \vec{E}) mit den mechanischen Größen (Dehnung/Verzerrung \vec{S} , mechanische Spannung $\vec{\sigma}$). Die mechanischen Größen sind symmetrische Tensoren 2. Stufe und werden hier in Voigt-Notation geschrieben (d. h. 1×6 -Vektoren). Für das Kleinsignalverhalten des piezoelektrischen Effektes wird ein lineares Materialverhalten angenommen. Die piezoelektrischen Grundgleichungen können in verschiedenen Formen geschrieben werden. Zwei der in [7, S. 144ff.] dargestellten Schreibweisen sind:

$$\text{d-Form:} \quad \vec{D} = [d]\vec{\sigma} + [\varepsilon^{\sigma}]\vec{E} \quad (3.1)$$

$$\vec{S} = [s^E]\vec{\sigma} + [d]_t\vec{E} \quad (3.2)$$

$$\text{e-Form:} \quad \vec{\sigma} = [c^E]\vec{S} - [e]_t\vec{E} \quad (3.3)$$

$$\vec{D} = [e]\vec{S} + [\varepsilon^S]\vec{E} \quad (3.4)$$

Die Materialparameter können außerdem wie folgt ineinander umgerechnet werden:

$$[s^{E,D}] = [c^{E,D}]^{-1} \quad (3.5)$$

$$[e] = [d] \cdot [s^E]^{-1} \quad (3.6)$$

Die Matrix der piezoelektrischen Ladungskonstanten $[d]$ für PVDF, das ohne Dehnung Polarisiert wurde, hat folgende Form [6]:

$$[d] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Tabelle 3.1.: Materialparameter für PVDF

piezoelektrische Parameter		
piezoelektrische Kraftkonstante, longitudinal	e_{33}	$32,603 \cdot 10^{-3} \text{ C m}^{-2}$
piezoelektrische Kraftkonstante, transversal	e_{31}	$-25,886 \cdot 10^{-3} \text{ C m}^{-2}$
piezoelektrische Kraftkonstante, Schereffekt	e_{15}	0 C m^{-2}
elektrische Parameter		
Permittivität	ε	$8,8542 \cdot 10^{-11} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}$
mechanische Parameter		
Dichte	ρ	1760 kg m^{-3}
Elastizitätsmodul	E	1 GPa
Poisson-Zahl	ν	$0,34$

In Tabelle 3.1 sind alle benötigten Materialparameter für PVDF zusammengestellt. Diese wurden, insofern angegeben, aus Anhang A entnommen. Dabei wurden die piezoelektrische Ladungskonstanten $[d]$ über Gl. (3.5) in die für die Simulationsumgebung benötigten

piezoelektrische Kraftkonstanten $[e]$ umgerechnet. Die mechanischen Moduli $[c]$ sind für lineares und isotropes Materialverhalten vollständig über die angegebenen Parameter E und ν bestimmt. Siehe hierzu Abschnitt 3.4.2.

3.1.2. Energiedichte und Wirkungsgrad von piezoelektrischen Wandlern

Nach Roundy et al. [8] kann die elektrische Ausgangsleistung P eines einfachen piezoelektrischen Biegebalkens angegeben werden. Dieser ist einseitig eingespannt und als Bimorph ausgeführt, d. h. mit zwei Schichten. Dies entspricht dem hier untersuchten Aufbau.

$$P = \frac{U^2}{2R} = \frac{1}{2R} \frac{\left(\frac{2k_{31}h_c}{k_2}\right)^2 \frac{c_p}{\varepsilon} A_{\text{in}}^2}{\left[\frac{\omega^2}{\Omega RC_b} - \Omega \left(\frac{1}{RC_b} + 2\zeta\omega\right)\right]^2 + \left[\omega^2 (1 + k_{31}^2) + \frac{2\zeta\omega}{RC_b} - \Omega^2\right]^2} \quad (3.8)$$

mit A_{in} : Erregungsamplitude (Beschleunigung) Ω : anregende Kreisfrequenz, ω Kreiseigenfrequenz, c_p : elastische Konstante des piezoelektrischen Materials, k_{31} : piezoelektrischer Kopplungskoeffizient, h_c Dicke einer piezoelektrischen Schicht, k_2 : geometrische Konstante, ε : Permittivität, R : elektrischer Widerstand der Last, U : Spannungsamplitude über der Last, C_b : Kapazität des piezoelektrischen Balkens, ζ : Dämpfungsgrad.

Hieraus ergibt sich eine maximale Leistung bei $\Omega = \omega$ [8], d. h. bei Betrieb in Resonanz. Um Energy-Harvester „stimmen“ zu können (Resonanz einstellen), soll das Eigenfrequenzverhalten von rotierenden Balken untersucht werden.

Darüber hinaus ergeben Studien von Shu und Lien [9], dass die Effizienz der Energieumwandlung vom Lastwiderstand, dem Verhältnis von erregender Frequenz zu Eigenfrequenz und dem Verhältnis von elektromechanischem Kopplungskoeffizienten zu mechanischem Dämpfungsgrad abhängt.

3.2. Biegeschwingungen von Balken mit kontinuierlich verteilten Größen

Bevor das Verhalten rotierender Balken untersucht wird, sollen an dieser Stelle Biegeschwingungen stationärer Balken betrachtet werden. Da im Falle rotierender Balken die Verteilung der physikalischen Größen wie der Dichte ρ von Bedeutung ist, wird von *Kontinuumsbalken* ausgegangen. Vereinfachend soll Homogenität und Isotropie angenommen werden.

Im ersten Abschnitt werden Bewegungsdifferentialgleichungen hergeleitet und die getroffenen Annahmen und Vereinfachungen erläutert. Im zweiten Abschnitt werden freie Biegeschwingungen untersucht.

3.2.1. Balkentheorie

Betrachtet werden soll die gerade Biegung eines Balkens, d. h. reine Biegung um die Hauptachsen mit Deviationsmoment $I_{yz} = 0$. Es wird der *Schwerpunktsatz* in z -Richtung formuliert:

$$\rho A \ddot{w} = Q' + q \quad (3.9)$$

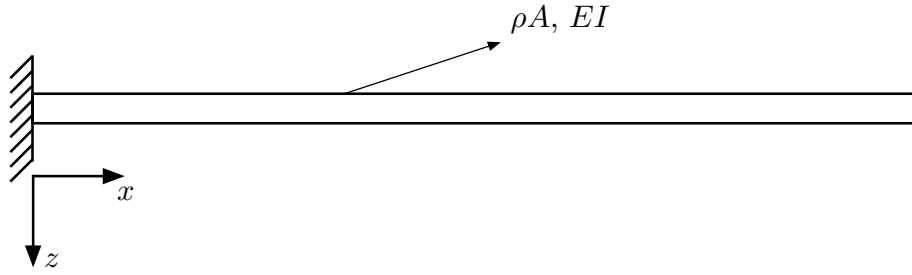


Abbildung 3.1.: Eingespannt-freier Balken

mit $w(x, t)$: Durchbiegung des Balkens, $\rho(x)$: Massendichte, $A(x)$: Querschnittsfläche, $Q(x, t)$: Querkraft, $q(x, t)$: Streckenlast.

Der *Drallsatz* um eine zur y -Achse parallele Achse durch den Schwerpunkt ergibt:

$$\rho I \ddot{\psi} = M' - Q \quad (3.10)$$

mit $\psi(x, t)$: Winkel zwischen undeformierter und deformierter Flächennormalen, $M(x, t)$: Biegemoment, $I(x) = I_{yy}(x)$: Flächenträgheitsmoment um die y -Achse. Es gelte das lineare Elastizitätsgesetz [10, S. 108ff] für das Biegemoment:

$$M = EI\psi' \quad (3.11)$$

und für die Querkraft:

$$Q = GA_S(w' + \psi) \quad (3.12)$$

mit $E(x)$: Elastizitätsmodul, $G(x)$: Schubmodul, $A_S(x) = \chi A(x)$: Schubfläche mit Korrekturfaktor χ . Wegen des linearen Materialmodells sind kleine Deformationen vorausgesetzt. Die Größe EI wird auch als *Biegesteifigkeit* und GA_S als *Schubsteifigkeit* bezeichnet. Der Vollständigkeit halber sei zusätzlich die *Dehnsteifigkeit* EA benannt.

Es stehen nun vier Gleichungen für die vier Unbekannten M, Q, w, ψ zur Verfügung. Durch Einsetzen der Materialgleichungen Gln. (3.11 - 3.12) in die Gln. (3.9 - 3.10) erhält man die Bewegungsdifferentialgleichungen der sogenannte *Timoshenkoschen Balkentheorie* [11, S. 240]:

$$\rho A \ddot{w} - [GA_S(w' + \psi)]' = q \quad (3.13)$$

$$\rho I \ddot{\psi} - [EI\psi']' + GA_S(w' + \psi) = 0 \quad (3.14)$$

hinzu kommen die nötigen Randbedingungen und Anfangsbedingungen.

Diese gekoppelten Differentialgleichungen berücksichtigen neben Biegung auch Schubdeformationen und Drehträgeit. Für kleine Frequenzen (Wellenlänge viel größer als Länge des Balkens) und schlanke Balken kann hingegen ein schubstarrer ($GA_S \rightarrow \infty$) Balken mit vernachlässigbarer Rotationsträgheit ($\rho I \rightarrow 0$) angenommen werden.

Ein Balken ist dann als schlank anzusehen, wenn der *Schlankheitsgrad* Λ des Balkens groß ist [10, S. 153]. Mit der Dicke h und der Länge L des Balkens wird Λ definiert als:

$$\Lambda = \sqrt{\left(\frac{AL^2}{I}\right)} \quad \text{für Rechteckquerschnitt:} \quad \Lambda = 2\sqrt{3}\frac{L}{h} \quad (3.15)$$

Oben genannte Vereinfachungen ergibt:

$$\text{aus Gl. (3.10):} \quad \rho I \ddot{\psi} = M' - Q \quad \Rightarrow \quad Q = M' \quad (3.16)$$

$$\text{aus Gl. (3.12):} \quad Q = GA_s (w' + \psi) \quad \Rightarrow \quad \psi = -w' \quad (3.17)$$

Letzteres wird als die *Bernoullische Hypothese* bezeichnet und bedeutet, dass Balkenquerschnitte die vor der Deformation senkrecht zur Balkenlängsachse stehen auch nach der Deformation senkrecht hierzu sind. Einsetzen von Gl. (3.17) in Gl. (3.11), diese wiederum in Gl. (3.16) und zuletzt diese in Gl. (3.9) ergibt die Bewegungsgleichung für die *Euler-Bernoullische Balkentheorie*:

$$(EIw'')'' + \rho A \ddot{w} = q \quad (3.18)$$

Auch hier kommen die Randbedingungen und Anfangsbedingungen hinzu.

Ein Balken, der mit der Euler-Bernoullischen Balkentheorie modelliert wird, verhält sich steifer als dies in der Timoshenkoschen Theorie der Fall wäre. D. h. die Durchbiegungen sind geringer und die Eigenfrequenzen größer.

3.2.2. Eigenfrequenzen gleichförmiger Euler-Bernoulli-Balken

Für freie Schwingungen des Balkens ist keine Belastung vorhanden, somit ist $q \equiv 0$. Betrachtet man außerdem einen gleichförmigen Balken mit $EI = \text{const.}$, so vereinfacht sich die Bewegungsdifferentialgleichung Gl. (3.18) zu:

$$EIw'''' + \rho A \ddot{w} = 0 \quad (3.19)$$

Um die Eigenfrequenzen eines Euler-Bernoullischen Balkens zu ermitteln, wie in [11, S. 242ff] beschrieben, kann der Ansatz für harmonische Schwingungen

$$w(x, t) = W(x) \cos(\omega t - \alpha) \quad (3.20)$$

in Gl. (3.19) eingesetzt werden, um eine gewöhnliche Differentialgleichung zu erhalten:

$$W'''' - \kappa^4 W = 0 \quad \text{mit} \quad \kappa^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI} \quad (3.21)$$

mit Eigenwerten κ und Eigenkreisfrequenzen ω .

Die allgemeine Lösung lautet nach [11, S. 242ff]:

$$W(x) = A \cos(\kappa x) + B \sin(\kappa x) + C \cosh(\kappa x) + D \sinh(\kappa x) \quad (3.22)$$

Werden die vier Randbedingungen des Balkens verwendet, so erhält man vier Gleichungen für die vier Unbekannten A, B, C, D . Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt die *charakteristische Gleichung*, aus der sich die Eigenwerte κ_i bestimmen lassen. Zu jedem Eigenwert κ_i gehört über Gl. (3.21) eine Eigenkreisfrequenz ω_i des Biegebalkens. Im Rahmen dieser Arbeit ist nur die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 , zugehörig zur ersten Mode, von Bedeutung. Die erste Eigenfrequenz für einen eingespannt-freien Balken mit konzentrierter Masse an der Spitze wird in Abschnitt 3.3.8 berechnet.

3.3. Mechanik rotierender Balken

Nun soll das Verhalten rotierender Balken analysiert werden. Zunächst werden Gleichungen für die kinetische Energie und das elastische Potential aufgestellt. Hieraus können über Energiemethoden oder Variationsprinzipien die benötigten Bewegungsdifferentialgleichungen erhalten werden. Nachdem diese so weit wie möglich vereinfacht wurden, wird die Bedeutung der einzelnen Terme erläutert. In dedizierten Unterkapiteln werden die auftretenden Versteifungs- und Erweichungseffekte, sowie der Unterschied zwischen *out-of-plane* und *in-plane* Biegeschwingungen ausführlich diskutiert.

Des Weiteren wird die Verteilung der Normalspannung im Balken genauer untersucht. Auch der Effekt einer konzentrierten Masse an der Spitze des Balkens wird betrachtet. Ergebnisse der Literaturrecherche zum Schwingungsverhalten rotierender Balken sind an passenden Stellen eingebracht.

3.3.1. Kinematik

Um die kinetische Energie T des rotierenden und schwingenden Kontinuumbalkens angeben zu können, soll die Geschwindigkeit eines Balkenelements an der Stelle x hergeleitet werden. Es gelten die Koordinatensysteme wie in Abb. 2.1b zu sehen. Die Winkelgeschwindigkeit der Welle sei konstant und betrage

$$\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_{y^*} \quad (3.23)$$

$$\Omega = 2\pi n = \text{const.} \quad (3.24)$$

Zur Zeit $t = 0$ ist $\varphi = \Omega t = 0$ und die x^* -Achse des Inertialsystems (x^*, y^*, z^*) fällt mit der x -Achse des mitbewegten Koordinatensystems (x, y, z) zusammen. In Anlehnung an [12, S. 242ff] lässt sich für diesen Fall die Position eines Elementes des Balkens formulieren:

$$\vec{r}(t = 0) = (r_0 + x + w_x) \vec{e}_{x^*} + w_y \vec{e}_{y^*} + w_z \vec{e}_{z^*} \quad (3.25)$$

wobei $\vec{w}(x) = w_x(x) \vec{e}_x + w_y(x) \vec{e}_y + w_z(x) \vec{e}_z$ die Verschiebung des Balkenelements aufgrund der Schwingung des Balkens bezeichnet.

Über eine lineare Transformation mit der passenden Drehmatrix kann nun der Ortsvektor $r(t = 0)$ auf den um den Winkel $\varphi = \Omega t$ rotierten Ortsvektor $\vec{r}(x, t)$ abgebildet werden. Die Drehmatrix um \vec{e}_{y^*} ist:

$$R_{\text{ot}} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & 0 & \sin(\Omega t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\Omega t) & 0 & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Somit lautet der allgemeine Ortsvektor eines schwingenden Elementes des rotierenden Balkens im Inertialsystem (x^*, y^*, z^*) :

$$\vec{r}(x, t) = R_{\text{ot}} \cdot \vec{r}(t = 0) = \begin{pmatrix} (r_0 + x + w_x) \cos(\Omega t) + w_z \sin(\Omega t) \\ w_y \\ -(r_0 + x + w_x) \sin(\Omega t) + w_z \cos(\Omega t) \end{pmatrix}_* \quad (3.27)$$

Durch Ableitung nach der Zeit kann der Geschwindigkeitsvektor erhalten werden:

$$\vec{v}(x, t) = \begin{pmatrix} [\dot{w}_z - \Omega(r_0 + x + w_x)] \sin(\Omega t) + [\dot{w}_x + \Omega w_z] \cos(\Omega t) \\ \dot{w}_y \\ [-\dot{w}_x - \Omega w_z] \sin(\Omega t) + [\dot{w}_z - \Omega(r_0 + x + w_x)] \cos(\Omega t) \end{pmatrix}_* \quad (3.28)$$

Zur Analyse der Balkenschwingungen müssen Differentialgleichungen für die Verschiebungsgrößen (w_x , w_y , w_z) aufgestellt werden. Dies kann über Energiemethoden oder Variationsprinzipien erfolgen, wodurch die Angabe der Beschleunigung für das weitere Vorgehen überflüssig ist.

3.3.2. Bewegungsdifferentialgleichungen für den rotierenden Balken

Die Bewegungsdifferentialgleichungen für einen rotierenden Balken ohne Anstellwinkel sollen hergeleitet werden. Dies bedeutet, dass eine Querschnittshauptachse des Balkens in der Rotationsebene liegt, während die andere normal auf der Rotationsebene steht. Wie in [12, S. 244ff], wird hierzu die kinetische Energie und die Formänderungsenergie formuliert. Mit Hilfe dieser können über geeignete Energiemethoden oder Variationsprinzipien die Bewegungsdifferentialgleichungen erhalten werden.

Mit der bereits bekannten Geschwindigkeit eines Balkenelements \vec{v} aus Gl. (3.28) und der Massendichte ρ kann die kinetische Energie bestimmt werden:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \vec{v} \cdot \vec{v} dx \quad (3.29)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left[\dot{w}_x^2 + \dot{w}_y^2 + \dot{w}_z^2 + 2\Omega (w_z \dot{w}_x - (r_0 + x + w_x) \dot{w}_z) + \Omega^2 (w_z^2 + (r_0 + x + w_x)^2) \right] dx \quad (3.30)$$

Das elastische Potential bzw. die Formänderungsenergie [10, S. 210] beträgt:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EA (s_{xx})^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{zz} (\psi'_y)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{yy} (\psi'_z)^2 dx \quad (3.31)$$

mit s : Längsdehnung des Balkens. Es sei angemerkt, dass keine Torsion auftritt und somit kein entsprechender Anteil im elastischen Potential Π enthalten ist. Außerdem wird Schubstarrheit angenommen und Drehträgheit vernachlässigt (Euler-Bernoulli-Balken). Wie in [12, S. 244] und [13] erläutert, ist zur Beschreibung der Wirkung einer Längskraft auf die Querbewegungen (Biegeschwingungen) des Balkens eine geometrisch nichtlineare Theorie nötig. Aus diesem Grund wird zunächst folgende nichtlineare Formulierung der Längsdehnung angesetzt:

$$s_{xx} = w'_x + \frac{w_y'^2}{2} + \frac{w_z'^2}{2} \quad (3.32)$$

Außerdem gelte die für schlanke Balken gültige *Bernoullische Annahme* für einen *schubstarrten Balken* [10, S. 116]:

$$\psi_y = -w'_y \quad (3.33)$$

$$\psi_z = -w'_z \quad (3.34)$$

Beachtet man dies und setzt Gln. (3.32 - 3.34) in Gl. (3.31) ein, so ergibt sich:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(w'_x + \frac{w'^2_y}{2} + \frac{w'^2_z}{2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{zz} (w''_y)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_{yy} (w''_z)^2 dx \quad (3.35)$$

Da Eigenfrequenzen betrachtet werden sollen, ist keine erregende Kraft vorhanden. Außerdem wird ein konservatives Modell betrachtet, die *Dissipation* ist daher $W_\delta = 0$.

Über eine geeignete Energiemethode oder ein geeignetes Variationsprinzip können nun die Bewegungsdifferentialgleichungen hergeleitet werden. In [12, S. 244] wurde hierfür das Prinzip von Hamilton (Prinzip der stationären Wirkung) angewandt. Für den hier beschriebenen Fall ergeben sich folgende *Bewegungsdifferentialgleichungen*:

$$\rho A \Omega^2 (r_0 + x + w_x) + 2\rho A \Omega \dot{w}_z + \left[EA \left(w'_x + \frac{w'^2_y}{2} + \frac{w'^2_z}{2} \right) \right]' = \rho A \ddot{w}_x \quad (3.36)$$

$$\left[EA \left(w'_x + \frac{w'^2_y}{2} + \frac{w'^2_z}{2} \right) w'_y \right]' - (EI_{zz} w''_y)'' = \rho A \ddot{w}_y \quad (3.37)$$

$$\rho A \Omega^2 w_z - 2\rho A \Omega \dot{w}_x + \left[EA \left(w'_x + \frac{w'^2_y}{2} + \frac{w'^2_z}{2} \right) w'_z \right]' - (EI_{yy} w''_z)'' = \rho A \ddot{w}_z \quad (3.38)$$

mit den Randbedingungen für einen eingespannt-freien Balken:

$$w_x(0, t) = 0 \quad N(L, t) = EA \left(w'_x + \frac{w'^2_y}{2} + \frac{w'^2_z}{2} \right) = 0 \quad (3.39)$$

$$w_y(0, t) = 0 \quad w'_y(0, t) = 0 \quad (3.40)$$

$$w_z(0, t) = 0 \quad w'_z(0, t) = 0 \quad (3.41)$$

$$M_y(L, t) = -EI w''_y(L, t) = 0 \quad Q_y(L, t) = - (EI w''_y)'(L, t) = 0 \quad (3.42)$$

$$M_z(L, t) = -EI w''_z(L, t) = 0 \quad Q_z(L, t) = - (EI w''_z)'(L, t) = 0 \quad (3.43)$$

$$(3.44)$$

Die acht Anfangswerte der Differentialgleichungen werden zur Bestimmung von Eigenfrequenzen nicht benötigt.

Die Gln. (3.36 - 3.38) stellen die Kräftegleichgewichtsbedingungen jeweils in x -, y - und z -Richtung dar. Die Terme mit Ω^2 repräsentieren den Anteil der Zentrifugalbeschleunigung. Diejenigen mit 2Ω sind die Coriolis-Terme. Über Letztere und über die Normalkraft im Balken $N(x) = EA \left(w'_x + \frac{w'^2_y}{2} + \frac{w'^2_z}{2} \right)$ sind die Gleichungen miteinander gekoppelt. Außerdem sind die DGLen nichtlinear aufgrund der entsprechenden Modellierung der Dehnung. Diese Gegebenheiten erschweren das Lösen der Differentialgleichungen. Daher sollen weitere Vereinfachungen vorgenommen werden.

Es soll davon ausgegangen werden, dass der Balken eine hohe Dehnsteifigkeit EA in Längsrichtung aufweist. Für diesen Fall können Längsschwingungen des Balkens vernachlässigt werden. Somit ist $(r_0 + x + w_x) \approx (r_0 + x)$ und $\rho A \ddot{w}_x \rightarrow 0$ und $2\rho A \Omega \dot{w}_x \rightarrow 0$.

Durch zusätzliche Vernachlässigung der Corioliskraft $2\rho A\Omega\dot{w}_z \rightarrow 0$ wird die erste Bewegungsdifferentialgleichung (Gl. (3.36)) entkoppelt. Aus dieser kann anschließend die Normalkraft $N(x)$ im Balken berechnet werden. Dies wird in Abschnitt 3.3.7 ausführlich behandelt.

Werden alle Vereinfachungen berücksichtigt und die Normalkraft in die Gl. (3.37) und Gl. (3.38) eingesetzt, so erhält man *lineare und entkoppelte Bewegungsdifferentialgleichungen* [12, S. 246] für die Biegeschwingungen mit *nicht* konstanten Koeffizienten wegen $N = N(x)$:

$$\boxed{\rho A\ddot{w}_y + (EI_{zz}w_y'')'' - (Nw_y')' = 0} \quad (3.45)$$

$$\boxed{\rho A\ddot{w}_z + (EI_{yy}w_z'')'' - \rho A\Omega^2 w_z - (Nw_z')' = 0} \quad (3.46)$$

Da durch die getroffenen Vereinfachungen Längsschwingungen vernachlässigt wurden und Gl. (3.36) nicht mehr berücksichtigt wird, ist auch die Kopplung der Längsschwingungen mit den Biegeschwingungen vernachlässigt worden. Dies ist zulässig, da die Eigenfrequenzen in Längsrichtung eines schlanken Balkens wesentlich größer sind als die Biegeeigenfrequenzen [13, S. 817][13, S. 826]. Siehe hierzu auch Abschnitt 3.3.6.

3.3.3. Versteifungs- und Erweichungseffekte

Werden die letzten beiden Gleichungen mit der Bewegungsdifferentialgleichung für den nicht rotierenden Balken (Gl. (3.18)) verglichen, so stellt man fest, dass zwei neue Terme auftreten. Ist N eine Zugkraft, so bewirkt der Term $(Nw')'$ eine effektive Versteifung des Systems gegenüber dem nicht rotierenden Fall, d. h. die Eigenfrequenzen werden größer. Hingegen ist für eine Druckkraft eine Erweichung zu beobachten, wodurch die Eigenfrequenzen niedriger werden.

Da die Zentrifugalkraft N mit steigender Winkelgeschwindigkeit Ω zunimmt, steigen auch die Eigenfrequenzen ω an. Dies gilt uneingeschränkt nur für das Modell mit vernachlässigter Kopplung (s. 3.3.6). Ein größerer Abstand zur Rotationsachse r_0 hat aufgrund der steigenden Fliehkraft eine größere Steigung dieser ω/Ω -Kurve zur Folge.

Auch bei einem nicht rotierenden, dafür aber eingespannten Balken oder Saite tritt dieser Versteifungseffekt auf. Man denke beispielsweise an eine Gitarrensaite, die durch Spannen gestimmt werden kann. Es wurden bereits Energy-Harvester entwickelt, die diese Stimmbarkeit durch axiale Spannungen ausnutzen, um diesen an die jeweilige Vibrationsquelle anzupassen [14] [15]. Oft ist die Frequenz einer Vibrationsquelle wegen Alterungseffekten, längerfristigen Temperaturschwankungen, etc., nicht konstant. Auch dann weisen solche Ausführungen einen Vorteil auf, da sie auf einfache Weise neu gestimmt werden können. An dieser Stelle soll auf einen Unterschied zwischen dem rotierenden Balken und dem vorgespannten Balken aufmerksam gemacht werden. Für den axial vorgespannten Balken gilt $N' = 0$, dadurch vereinfacht sich $(Nw_y')'$ zu

$$(Nw_y')' = N'w_y' + Nw_y'' = Nw_y'' . \quad (3.47)$$

Auf Grund dessen, dass die Fliehkraft im Balken von der Koordinate x abhängig ist, wie in Gl. (3.67) ersichtlich, kann diese Vereinfachung für den rotierenden Balken nicht vorgenommen werden.

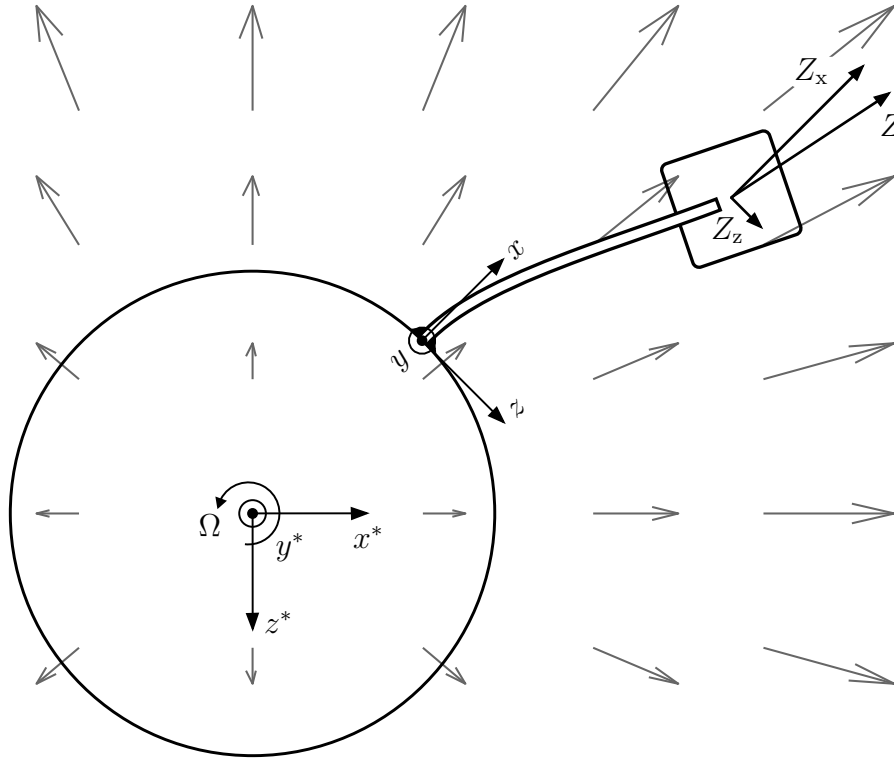


Abbildung 3.2.: Skizze des deformierten Balkens im Zentrifugalbeschleunigungsfeld. Ein-gezeichnete Kräfte für die Spitze des Balkens: Z : Zentrifugalkraft, Z_x : Hauptanteil der Zentrifugalkraft, Z_z : Divergenzanteil der Zentrifugalkraft.

Der zweite Term, der für den rotierenden Balken zur Bewegungsdifferentialgleichung Gl. (3.46) hinzukommt, ist der Term $\rho A \Omega^2 w_z$. Wichtig ist die Erkenntnis, dass dieser Term nur in w_z -Richtung auftritt und somit nicht in Gl. (3.45) wiederzufinden ist. Dieser Term beschreibt die *Fliehkraftdivergenz* N_z und bewirkt im Gegensatz zur Zugkraft im Balken eine Verringerung der effektiven Biegesteifigkeit des Balkens in diese Richtung. Dadurch verringern sich auch die Eigenfrequenzen dieser Mode. Hieraus folgt, dass für $I_{yy} = I_{zz}$ die Eigenfrequenzen des rotierenden Balkens in z -Richtung (in-plane) immer kleiner sein werden als in y -Richtung (out-of-plane). Eine ausführliche Diskussion zu *out-of-plane* und *in-plane* Schwingungen folgt im nächsten Abschnitt.

3.3.4. Out-of-plane und in-plane Biegeschwingungen

Gl. (3.45) beschreibt die Schwingungen des Balkens in y -Richtung. Diese werden *out-of-plane Schwingungen* [16] genannt, da es sich hier um Bewegungen außerhalb der Rotationsebene (hier die x - z -Ebene, s. Abb. 2.1b) handelt. Alternativ wird auch die Bezeichnung *flapwise Biegeschwingungen* [13] benutzt.

Die Schwingungen aus Gl. (3.46) stellen Bewegungen in z -Richtung dar und liegen somit in der Rotationsebene. Aus diesem Grund werden sie *in-plane Schwingungen* genannt.

Manche Autoren benutzen stattdessen die Bezeichnung *chordwise Biegeschwingungen* oder *lead-lag Schwingungen*.

Wie bereits im Abschnitt 3.3.3 angemerkt, unterscheiden sich diese beiden Schwingungsdifferentialgleichungen durch den Term der Fliehkraftdivergenz $\rho A \Omega^2 w_z$. Das Zentrifugalbeschleunigungsfeld ist zylindrisch und radial nach außen gerichtet. Somit tritt im verbogenen Balken in Abb. 3.2 nicht nur eine axiale Hauptkomponente der Fliehkraft auf, sondern auch ein Divergenzanteil in Querrichtung des unverbogenen Balkens. Hingegen ist bei Bewegungen senkrecht zur Rotationsebene die Fliehkraft und dessen Richtung konstant, wodurch kein Divergenzanteil auftritt.

Im Gegensatz zur elastischen Rückstellkraft tendiert die Fliehkraftdivergenz N_z dazu, den Balken weiter zu verbiegen. Aus diesem Grund wirkt sie in z -Richtung erweichend auf den Balken. Diese Auswirkung kann im Allgemeinen nicht vernachlässigt werden. Tatsächlich ermöglicht erst dieser Effekt einen Betrieb des Balkens in Resonanz mit der Winkelgeschwindigkeit Ω . Forschungsarbeiten von Yoo et al. [13] [17] ergaben, dass für out-of-plane Schwingungen eines Balkens ohne Endmasse die erste Eigenkreisfrequenz stets größer ist als die Winkelgeschwindigkeit: $\omega > \Omega \quad \forall \Omega \in \mathbb{R}^+$. Bei in-plane Schwingungen ist es hingegen möglich eine Resonanzstelle $\omega = \Omega$ für $\Omega = \Omega_r$ zu finden. Hierzu muss der Abstand zur Rotationsachse r_0 hinreichend klein sein [13]. Eine solche Resonanzstelle existiert genau dann, wenn die asymptotische Steigung der Eigenkreisfrequenz bezüglich der Winkelgeschwindigkeit kleiner als eins ist:

$$\lambda = \frac{\omega}{\Omega} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \Omega_r \in \mathbb{R}^+ : \omega = \Omega_r \quad (3.48)$$

Wie von Yoo und Shin [13, S. 819] beschrieben, lässt sich die asymptotische Steigung λ durch das Vernachlässigen der strukturellen Steifigkeit gegenüber der dynamischen Versteifung berechnen. Eine Steigung $\frac{d\omega}{d\Omega} \stackrel{!}{=} 1$ für $\Omega \in [0, \Omega_{\max}]$ zu finden, ist die idealisierte Aufgabenstellung dieser Arbeit. Wegen der strukturellen Steifigkeit des Systems kann dies jedoch nur für die asymptotische Steigung λ und somit für $\Omega \gg 0$ erzielt werden. Dies bedeutet, dass höchstens eine Näherungslösung $\omega \approx \Omega$ im Bereich $\Omega \in [\Omega_{\min}, \Omega_{\max}]$ gefunden werden kann.

Des Weiteren kann, wie Bazoune [16] beschreibt, nach Lo und Renbarger eine Beziehung zwischen der Biegeeigenfrequenz und dem Anstellwinkel α des Balkens angegeben werden:

$$\omega_\alpha^2 = \omega_{\text{op}}^2 - \Omega^2 \sin^2(\alpha) \quad (3.49)$$

Für $\alpha = 0^\circ$ wird die Schwingung des Balkens quer zur Rotationsebene, also out-of-plane ($\omega_{\text{op}} = \omega_{0^\circ}$), betrachtet, für $\alpha = 90^\circ$ hingegen in-plane ($\omega_{\text{ip}} = \omega_{90^\circ}$). Werden für die hier betrachtete Geometrie Biegeschwingungen um die y -Achse untersucht, so beträgt der Anstellwinkel $\alpha = 90^\circ$. Insbesondere ist durch letzte Gleichung eine Beziehung zwischen der Eigenfrequenz der in-plane und out-of-plane Vibrationen für gleiche Biegesteifigkeit EI gegeben:

$$\omega_{\text{ip}}^2 = \omega_{\text{op}}^2 - \Omega^2 \quad (3.50)$$

Dieser Zusammenhang zwischen in-plane und out-of-plane Biegeeigenfrequenzen ergibt sich aus der Relation zwischen der dynamischen in-plane und out-of-plane Steifigkeitsmatrix (Gl. (3.97)). Siehe hierzu Abschnitt 3.4.1.

3.3.5. Southwellkoeffizienten

Lamb und Southwell haben die ersten Untersuchungen zur dynamischen Versteifung von Balken durchgeführt [16]. Auch Gough wird in [13] genannt. Sie haben eine Näherung für die Variation der Eigenfrequenzen von rotierenden Strukturen für den Bereich kleiner Frequenzen [13] hergeleitet. Diese als Southwell-Gleichung bekannte Relation lässt sich wie folgt schreiben:

$$\omega_{\Omega}^2 = \omega_0^2 + S\Omega^2 \quad (3.51)$$

wobei ω_{Ω} die erste Eigenkreisfrequenz des rotierenden Balkens bezeichnet und ω_0 die des nicht rotierenden Balkens. Der Koeffizient S ist von der Geometrie und der Schwingungs-mode abhängig und wird als *Southwellkoeffizient* bezeichnet.

Diese aus den 1920er Jahren stammende Methode [17, S. 152] zur Analyse der dynamischen Versteifung findet heutzutage zwar noch Anwendung, wird aber zugunsten von Finite-Elemente-Simulationen immer seltener eingesetzt [12]. Auch wenn Gl. (3.51) eine einfache Beziehung zwischen ω_{Ω} und ω_0 angibt, so besteht die Schwierigkeit in der analytischen Bestimmung der Southwellkoeffizienten.

Nach Yoo und Shin [13] hängen die Southwellkoeffizienten mit der asymptotischen Steigung der Eigenkreisfrequenz aus Gl. (3.48) zusammen:

$$\lambda = \sqrt{S} \quad (3.52)$$

Somit kann der Southwellkoeffizient über die Steigung λ bestimmt werden.

Bazoune [16] gibt außerdem an, dass sich die Southwellkoeffizienten schlanker Balken von in-plane und out-of-plane Schwingungen mit gleichen Biegesteifigkeiten mindestens um eine Einheit unterscheiden:

$$S_{\text{op}} - S_{\text{ip}} \geq 1 \quad (3.53)$$

3.3.6. Instabilitäten

Wird die Biegeeigenfrequenz eines Balkens zu Null, so treten Instabilitäten auf. Bei der klassischen Modellierung der dynamischen Versteifung eines Balkens ohne Endmasse nehmen die Biegeeigenfrequenzen stetig monoton zu. Da die Kopplung von Längsschwingungen und Biegeschwingungen jedoch vernachlässigt wurde, ist dieses Modell nur für kleine Winkelgeschwindigkeiten Ω gültig. Yoo und Shin [13] haben einen Balken ohne Endmasse analysiert und kamen zu dem Ergebnis, dass bei Berücksichtigung von Kopplungseffekten die erste Biegeeigenfrequenz ein Maximum erreicht und anschließend abnimmt, bis sie bei der Knickgeschwindigkeit Ω_b zu Null wird. An dieser Stelle treten Instabilitäten (Knicken) auf. Interessanterweise wird bei vernachlässigter Modenkopplung die erste Längseigenfrequenz bei derselben Winkelgeschwindigkeit Ω_b zu Null. Für den Balken ohne Endmasse hat der Abstand zur Rotationsachse r_0 keinen Einfluss auf die Knickgeschwindigkeit Ω_b , jedoch ist diese proportional zum Schlankheitsgrad Λ des Balkens:

$$\Omega_b \sim \Lambda = \sqrt{\left(\frac{AL^2}{I}\right)} \quad (3.54)$$

Dies liegt daran, dass die Zentrifugalkraft bei einem schlankeren Balken geringer ist. Aus diesem Grund lässt sich vermuten, dass eine Endmasse einen signifikanten Einfluss auf die Knickgeschwindigkeit Ω_b hat. Die Simulation ergibt, dass der Abstand zur Rotationsachse r_0 hier eine Rolle spielt und ein schlankerer Balken früher knickt. Die in der Simulation beobachteten Effekte sind jedoch andere als die von Yoo und Shin beschrieben. Siehe hierzu Abschnitt 5.

Weiterhin wird in [13] darauf hingewiesen, dass die Abweichung zwischen einer Modellierung mit Kopplung und ohne Kopplung abnimmt, wenn Ω_b größer wird.

3.3.7. Normalspannung im Balken in Folge der axialen Fliehkraft

Der Hauptanteil der Fliehkraft (s. Abb. 3.2) zeigt in axiale Richtung des Balkens (x -Richtung) und erzeugt eine von der Koordinate x abhängige Normalkraft $N(x)$ im Balken. Diese ist für die Versteifungseffekte des rotierenden Balkens verantwortlich. Mit dem Hookeschen Gesetz und dem nicht linearen Ansatz für die Dehnung $s_{xx} = \left(w'_x + \frac{w'_y{}^2}{2} + \frac{w'_z{}^2}{2} \right)$ ist die Normalkraft:

$$N = EA s_{xx} = EA \left(w'_x + \frac{w'_y{}^2}{2} + \frac{w'_z{}^2}{2} \right) \quad (3.55)$$

Zur Berechnung der Normalkraft N wird die Bewegungsdifferentialgleichung des rotierenden Balkens in x -Richtung herangezogen. Diese wurde in Abschnitt 3.3.2 aufgestellt.

$$\rho A \Omega^2 (r_0 + x + w_x) + 2\rho A \Omega \dot{w}_z + \left[EA \left(w'_x + \frac{w'_y{}^2}{2} + \frac{w'_z{}^2}{2} \right) \right]' = \rho A \ddot{w}_x \quad (3.36)$$

Außerdem wurde erwähnt, dass für Balken mit hoher Dehnsteifigkeit EA , die mit viel kleineren Frequenzen als der ersten Längseigenfrequenz angeregt werden, Längsschwingungen vernachlässigt werden können:

$$(r_0 + x + w_x) \approx (r_0 + x) \quad (3.56)$$

$$\rho A \ddot{w}_x \rightarrow 0 \quad (3.57)$$

$$2\rho A \Omega \dot{w}_x \rightarrow 0 \quad (3.58)$$

Als weitere Vereinfachung soll der aus der Coriolis-Beschleunigung resultierende Term $2\rho A \Omega \dot{w}_z$ vernachlässigt werden. Hierzu muss gelten:

$$\rho A \Omega^2 (r_0 + x) \gg 2\rho A \Omega \dot{w}_z \quad (3.59)$$

Wird ein Ansatz für harmonische Schwingungen $w_z = \hat{w}_z \sin(\Omega t)$ eingesetzt ergibt sich:

$$\rho A \Omega^2 (r_0 + x) \gg 2\rho A \Omega^2 \hat{w}_z \cos(\Omega t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.60)$$

$$\Rightarrow (r_0 + x) \gg 2\hat{w}_z \quad (3.61)$$

Da kleine Amplituden \hat{w}_z angenommen werden und $r_0 > 0$ gilt, kann diese Bedingung als erfüllt betrachtet werden und die Kopplung durch den Coriolis-Term $2\rho A \Omega \dot{w}_z$ mit den

Schwingungen in z -Richtung vernachlässigt werden. Durch Berücksichtigen der Vereinfachungen und Einsetzen der Normalkraft N , reduziert sich die Bewegungsdifferentialgleichung in x -Richtung Gl. (3.36) zu:

$$N' + \rho A \Omega^2 (r_0 + x) = 0 \quad (3.62)$$

Die Normalkraft $N(x)$ wird durch Lösen dieser Differentialgleichung erhalten [12, S. 245]:

$$N(x) = -\Omega^2 \int_0^x \rho A (r_0 + \bar{x}) d\bar{x} + c \quad (3.63)$$

wobei die Integrationskonstante c aus der Randbedingung für die Normalkraft bestimmt werden muss. Für einen einseitig eingespannten Balken ist das Ende bei $x = L$ frei. Somit muss die Normalkraft an diesem Ende verschwinden $N(L, t) \stackrel{!}{=} 0$:

$$N(L) = -\Omega^2 \int_0^L \rho A (r_0 + \bar{x}) d\bar{x} + c \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.64)$$

$$\Rightarrow c = \Omega^2 \int_0^L \rho A (r_0 + \bar{x}) d\bar{x} \quad (3.65)$$

Einsetzen von c in Gl. (3.63) ergibt [12, S. 245]:

$$N(x) = \Omega^2 \left[\int_0^L \rho A (r_0 + \bar{x}) d\bar{x} - \int_0^x \rho A (r_0 + \bar{x}) d\bar{x} \right] \quad (3.66)$$

$$\Rightarrow \boxed{N(x) = \Omega^2 \int_x^L \rho A (r_0 + \bar{x}) d\bar{x}} \quad (3.67)$$

Im Weiteren soll beispielhaft der Verlauf der Normalkraft und die daraus resultierende Normalspannung im Balken für die Geometrie aus Abb. 3.3 berechnet werden. Bei $x = l_m$ findet ein Übergang von $\rho_1 A_1 = const.$ und $E_1 I_1 = const.$ zu $\rho_2 A_2 = const.$ und $E_2 I_2 = const.$ statt. Um zu überprüfen, ob die Belastung durch die Fliehkraft in der Finite-Elemente-Simulation richtig vorgegeben ist, werden die Ergebnisse mit denen der Simulation verglichen.

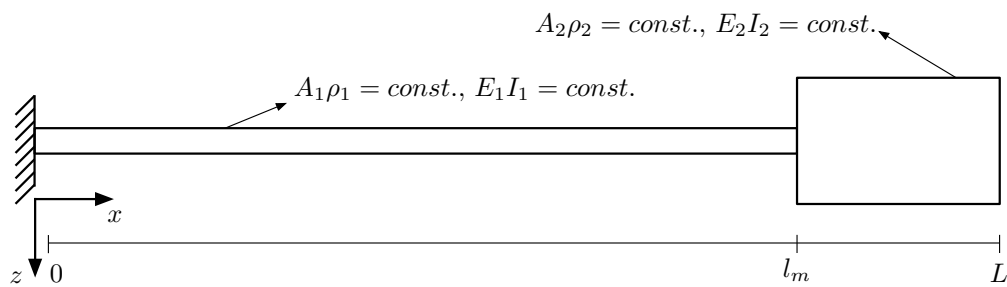


Abbildung 3.3.: Eingespannt-freier Balken mit abschnittsweise konstanten Parametern

Der betrachtete Balken besitzt abschnittsweise eine konstante Massenverteilung:

$$\rho(x)A(x) = \begin{cases} \rho_1 A_1 & \text{für } 0 \leq x < l_m \\ \rho_2 A_2 & \text{für } l_m \leq x \leq L \end{cases} \quad (3.68)$$

Hiermit kann die Normalkraft $N(x)$ geschrieben werden als:

$$N(x) = \begin{cases} \Omega^2 \rho_1 A_1 \int_x^{l_m} (r_0 + \bar{x}) \, d\bar{x} + \Omega^2 \rho_2 A_2 \int_{l_m}^L (r_0 + \bar{x}) \, d\bar{x} & \text{für } 0 \leq x < l_m \\ \Omega^2 \rho_2 A_2 \int_x^L (r_0 + \bar{x}) \, d\bar{x} & \text{für } l_m \leq x \leq L \end{cases} \quad (3.69)$$

Integrieren ergibt:

$$N(\xi) = \begin{cases} \Omega^2 \rho_1 A_1 L^2 \left[\delta (\lambda_m - \xi) + \frac{1}{2} (\lambda_m^2 - \xi^2) \right] \\ \quad + \Omega^2 \rho_2 A_2 L^2 \left[\delta (1 - \lambda_m) + \frac{1}{2} (1 - \lambda_m^2) \right] & \text{für } 0 \leq x < l_m \\ \Omega^2 \rho_2 A_2 L^2 \left[\delta (1 - \xi) + \frac{1}{2} (1 - \xi^2) \right] & \text{für } l_m \leq x \leq L \end{cases} \quad (3.70)$$

mit den normierten Größen $\xi = \frac{x}{L}$, $\delta = \frac{r_0}{L}$, $\lambda_m = \frac{l_m}{L}$.

Der Verlauf der resultierenden Normalkraft $N(x)$ ist für verschiedene Abstände zur Rotationsachse δ in Abb. 3.4 dargestellt. Die Normalspannung $\sigma_N(x) = N(x)/A(x)$ und das entsprechende Ergebnis aus einer Simulation mit *CFS++* sind in Abb. 3.5 aufgetragen.

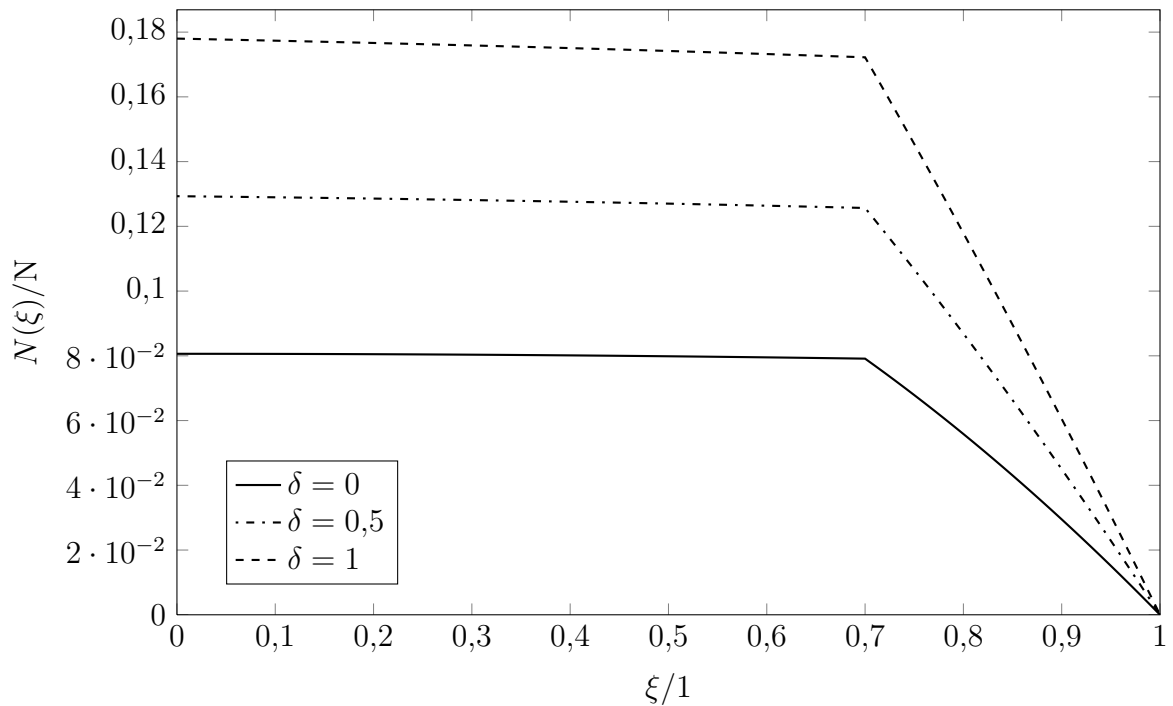


Abbildung 3.4.: Normalkraft $N(x)$ in einem rotierenden Balken der Breite $b = 5$ mm, Geometrie nach Abb. 3.3, $\lambda_m = 0,7$, Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 2 \pi 10 \text{ rad s}^{-1}$.

Das Ergebnis der Simulation weicht im Übergangsbereich der beiden Abschnitte erheblich ab. Dies liegt daran, dass bei der Simulation der Balken um 1 mm in die Endmasse

aus Stahl eingeführt ist. Hierdurch entsteht eine leicht unterschiedliche Geometrie, insbesondere sind dadurch zwei Übergangsstellen vorhanden. In *CFS++* wird außerdem ein Zwei-Parameter-Modell (Plane-Strain-State) verwendet. Die Normalspannung wurde in der Mitte des Balkens ermittelt. Für das unterschiedliche Materialverhalten gelten zudem Übergangsbedingungen für die mechanische Spannung und Dehnung. Das vollständige Ergebnis $\sigma_N(x, y)$ der *CFS++*-Simulation, sowie die verwendete Geometrie ist in Abb. 4.4 im Abschnitt 4.2 graphisch dargestellt.

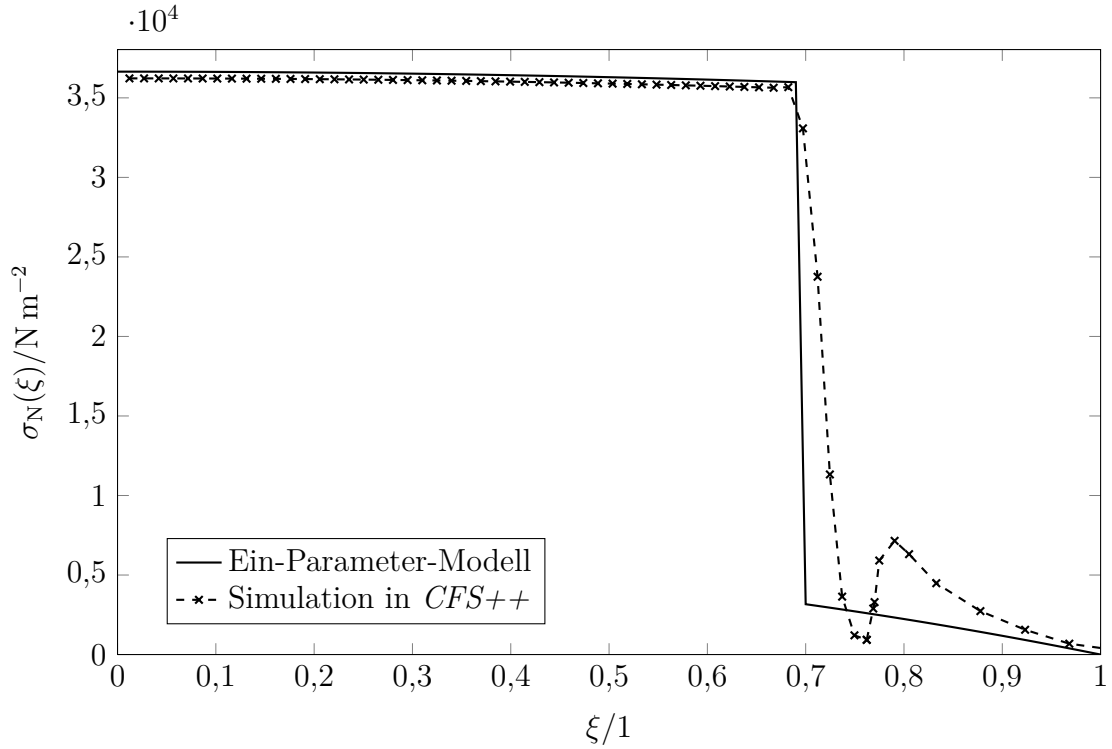


Abbildung 3.5.: Normalspannung $\sigma_N(x)$ im rotierenden Balken, Geometrie nach Abb. 3.3, $\lambda_m = 0,7$, Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 2\pi 10 \text{ rad s}^{-1}$. In der Simulation beginnt die Masse bei $\xi = 0,7$ und der PVDF-Balken endet bei $\xi = 0,75$.

3.3.8. Effekt einer konzentrierten Masse auf die Modencharakteristik

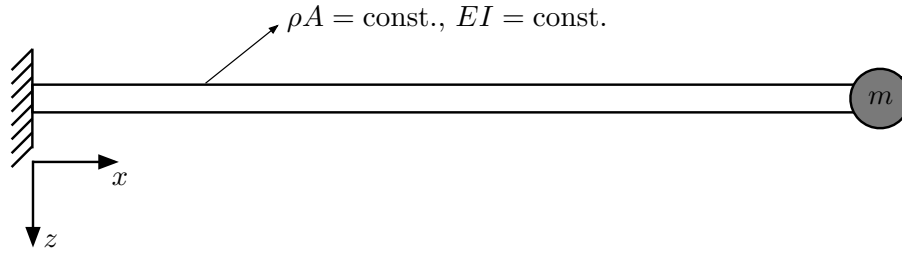


Abbildung 3.6.: Eingespannt-freier Balken mit konzentrierter Masse m an der Spitze.

Es wird ein zunächst nicht rotierender, gleichförmiger, eingespannt-freier Balken nach Abb. 3.6 mit einer konzentrierten Masse am freien Ende („Endmasse“) betrachtet. Unter den Bedingungen von Abschnitt 3.2.1 ist die *Euler-Bernoullische* Bewegungsdifferentialgleichung für harmonische Schwingungen Gl. (3.21) gültig:

$$W'''' - \kappa^4 W = 0 \quad \text{mit} \quad \kappa^4 = \omega^2 \frac{\rho A}{EI} \quad (3.21)$$

Die Randbedingungen für diesen Balken lauten:

$$w(0, t) = 0 \quad (3.71)$$

$$w'(0, t) = 0 \quad (3.72)$$

$$M(L, t) = -EIw''(L, t) = 0 \quad (3.73)$$

$$Q(L, t) = EIw'''(L, t) = m\ddot{w}(L, t) \quad (3.74)$$

Die allgemeine Lösung für $W(x)$ wurde bereits in Gl. (3.22) gegeben. Sie hat folgende Form:

$$W(x) = A \cos(\kappa x) + B \sin(\kappa x) + C \cosh(\kappa x) + D \sinh(\kappa x) \quad (3.22)$$

Für ein festes Massenverhältnis $\epsilon = \frac{m}{\rho AL}$ der Endmasse m zur Balkenmasse ist die Lösung dieser Gleichung in [11, S. 247ff] angegeben. Der Lösungsweg soll kurz dargestellt werden. Durch Einsetzen eines harmonischen Ansatzes für $w(x, t)$ in die Gleichungen der Randbedingungen und durch Berücksichtigen, dass die Randbedingungen $\forall t \in \mathbb{R}^+$ gelten müssen, gelangt man zum Gleichungssystem:

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\cos(\kappa L) & -\sin(\kappa L) & \cosh(\kappa L) & \sinh(\kappa L) \\ \epsilon \kappa L \cos(\kappa L) & \epsilon \kappa L \sin(\kappa L) & \epsilon \kappa L \cosh(\kappa L) & \epsilon \kappa L \sinh(\kappa L) \\ +\sin(\kappa L) & -\cos(\kappa L) & +\sinh(\kappa L) & +\cosh(\kappa L) \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

Eine nicht triviale Lösung der Gl. (3.75) kann nur für eine singuläre Matrix \mathbf{A} gefunden werden. Hieraus ergibt sich die *charakteristische Gleichung*, aus der die Werte $\kappa_1 L$ in Abhängigkeit von ϵ ermittelt werden können:

$$\det \mathbf{A} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.77)$$

$$\Rightarrow 1 + \cosh(\kappa L) \cos(\kappa L) + \epsilon \kappa L (\sinh(\kappa L) \cos(\kappa L) - \cosh(\kappa L) \sin(\kappa L)) = 0 \quad (3.78)$$

Die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 ergibt sich dann mit dem ersten Eigenwert κ_1 durch Einsetzen in Gl. (3.21):

$$\boxed{\omega_1 = (\kappa_1 L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}} \quad (3.79)$$

$$= (\kappa_1 L)^2 \frac{h}{L^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho}} \quad \text{für} \quad EI = \frac{bh^3}{12}, \quad A = bh \quad (3.80)$$

Der Zusammenhang zwischen der ersten Eigenkreisfrequenz ω_1 und dem Massenverhältnis ϵ soll näher untersucht werden. Alle weiteren Parameter seien konstant. Der Einfachheit halber soll im Folgenden mit ω und κ die erste Eigenkreisfrequenz und Eigenwert ω_1 und κ_1 bezeichnet werden. Hierzu wird die Größe $\kappa_L := \kappa L$ definiert. Diese kann durch die charakteristische Gleichung Gl. (3.78) bestimmt werden und ergibt sich somit aus den Randbedingungen. Aus diesem Grund ist κ_L abhängig von ϵ , also $\kappa_L = \kappa_L(\epsilon)$. Werte für $\kappa_L(\epsilon)$ wurden im Bereich $0 \leq \epsilon \leq 30$ numerisch bestimmt und die Quadrate in Abb. 3.7 aufgetragen. Da nach Gl. (3.79) $\omega \sim \kappa_L^2$ gilt, ändert sich die Eigenfrequenz proportional. Die Biegeeigenfrequenz ω des Balkens nimmt mit zunehmender Masse ab. Jedoch sinkt die Änderungsrate mit größer werdender Endmasse. Dies gilt auch für einen rotierenden Balken, wie Yoo et al. in [17] herausgefunden haben. Hoa [18] weist darauf hin, dass die Endmasse m einen zu Ω^2 proportionalen Einfluss auf die effektive Steifigkeit des Systems hat (größere Fliehkräfte). Der Einfluss auf die effektive Masse des Systems ist hingegen unabhängig von der Winkelgeschwindigkeit Ω .

In der Arbeit von Yoo et al. [17] sind weitere Modaleigenschaften rotierender Balken mit konzentrierter Masse zusammengestellt. Hiernach ändert sich im Gegensatz zur Eigenfrequenz die Steigung der ω/Ω -Kurve durch Variieren der Masse kaum. Wird die Änderung der Eigenfrequenz eines rotierenden Balkens durch Variation der Position der

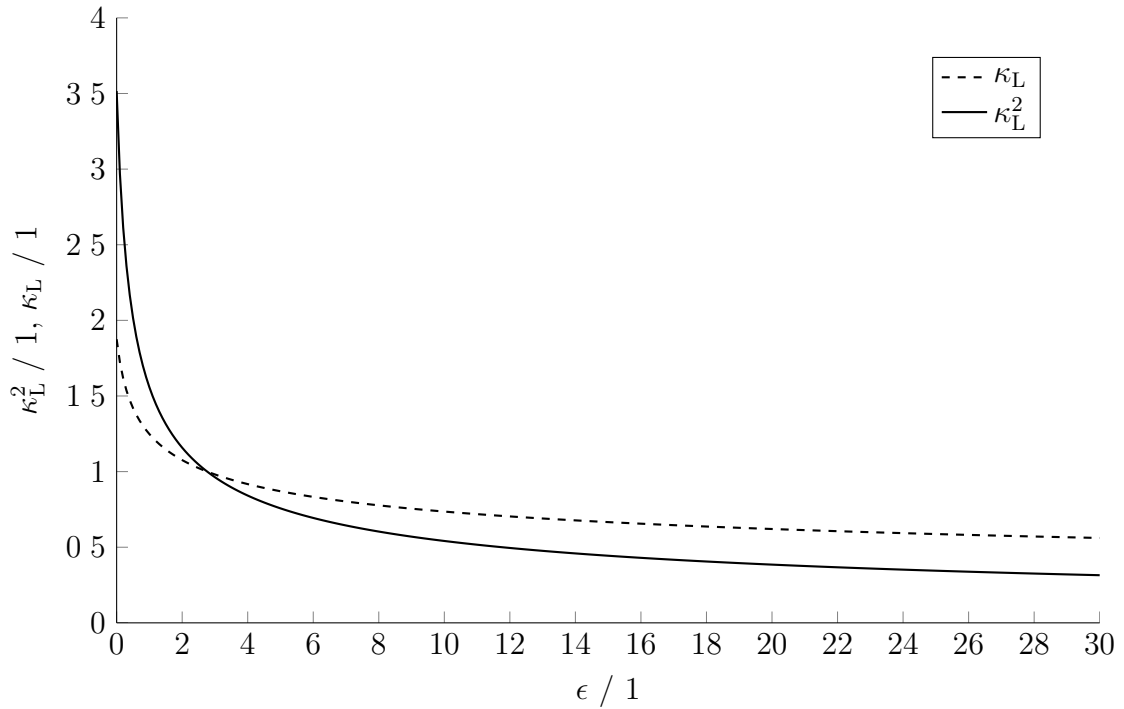


Abbildung 3.7.: Numerische Lösung für κ_L^2 in Abhängigkeit von ϵ eines einseitig eingespannten Biegebalkens mit Endmassenverhältnis ϵ .

Masse β *ceteris paribus* vom eingespannten Ende $\beta = 0$ zum freien Ende $\beta = L$ betrachtet, so beobachtet man zunächst einen Anstieg der Eigenfrequenz, ein Maximum wird bei $\beta \approx 0,4L$ erreicht und anschließend sinkt die Eigenfrequenz bis auf ein globales Minimum bei $\beta = L$. Außerdem beeinflusst die Position der konzentrierten Masse die Steigung der ω/Ω -Kurve: ein Maximum ergibt sich, wie bei der Eigenfrequenz, bei $\beta \approx 0,4L$. Des Weiteren sei angemerkt, dass bei $\beta \approx 0,4L$ die Biegung des Balkens gleichmäßiger auf seine Länge verteilt ist als bei anderen Positionen.

In dieser Arbeit soll die ω/Ω -Kurve möglichst gut an die Idealkurve $\omega = \Omega$ angepasst werden. Hierzu muss die Eigenfrequenz des nicht rotierenden Balkens $\omega_0 = \omega(\Omega = 0)$ möglichst klein sein. Deshalb wird im Rahmen dieser Arbeit ein Balken mit einer Endmasse an der Position $\beta = L$ analysiert, wo sich ein Minimum für die Eigenfrequenz $\omega(\Omega)$ ergibt, insbesondere auch für ω_0 .

3.4. Näherungsverfahren

Die Normalkraft $N(x)$, die aufgrund der Zentrifugalbeschleunigung im Balken auftritt, hängt von der Position x ab. Somit sind die Koeffizienten der Bewegungsdifferentialgleichungen des rotierenden Balkens Gl. (3.45 - 3.46) nicht konstant. Dies bedeutet, dass Näherungsrechnungen zur Lösung kaum vermieden werden können. Eingesetzt wird die Finite-Elemente-Methode mit der Simulationsumgebung *CFS++*. In diesem Abschnitt sollen die theoretischen Grundlagen hierzu erläutert werden. Zuvor soll jedoch

das Galerkin-Näherungsverfahren auf die in-plane Bewegungsdifferentialgleichung angewendet werden. Hierdurch werden wichtige Zusammenhänge ersichtlich die in der FE-Simulation berücksichtigt werden müssen.

3.4.1. Galerkin-Verfahren: Beziehung zwischen Steifigkeitsmatrix der *in-plane* und *out-of-plane* Schwingungen

Die Bewegungsdifferentialgleichung für *in-plane*-Schwingungen des rotierenden Balkens wurden bereits in Abschnitt 3.18 hergeleitet. Um die Auswirkung der einzelnen Terme der DGL auf die effektive Steifigkeit bzw. Masse des Systems zu verstehen, soll das Galerkin-Verfahren [11, S. 407ff] angewendet werden. Durch dieses Näherungsverfahren entsteht ein lineares Gleichungssystem (LGS), in dem eine Massenmatrix und eine Steifigkeitsmatrix identifizierbar sind, ähnlich der Finiten-Elemente-Methode.

Das Problem für *in-plane* Schwingungen ist durch die Bewegungsdifferentialgleichung Gl. (3.46) und Randbedingungen gegeben. Mit den Umbenennungen $w = w_z$, $I = I_{yy}$ lautet dieses:

$$\rho A \ddot{w} + (EIw'')'' - (Nw')' - \rho A \Omega^2 w = 0 \quad (3.46)$$

Randbedingungen:

$$w(0, t) = 0 \quad w'(0, t) = 0 \quad (3.81)$$

$$M(L, t) = -EIw''(L, t) = 0 \quad Q(L, t) = -(EIw''(L, t))' = 0 \quad (3.82)$$

Gln. (3.81) sind die sogenannten essentiellen Randbedingungen, wohingegen Gln. (3.82) die natürlichen Randbedingungen darstellen.

Es soll damit begonnen werden, die Ordnung der Bewegungsdifferentialgleichung zu reduzieren. Dies kann erreicht werden, indem sie in die schwache Form ([11, S. 410][19, S. 9ff][20, S. 234ff]) überführt wird. Hierzu wird die Gleichung mit einer *Testfunktion* $v(x)$ gewichtet und über die Länge $(0, L)$ integriert. Anschließend wird zweimal partiell integriert, wodurch die Ordnung von vier auf zwei abnimmt. Die Testfunktion $v(x)$ erfüllt die essentiellen Randbedingungen $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$ [11, S. 409], ansonsten ist sie beliebig.

$$\int_0^L [\rho A \ddot{w} + (EIw'')'' - (Nw')' - \rho A \Omega^2 w] v \, dx = 0 \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^L \rho A \ddot{w} v \, dx + \cancel{[(EIw'')' v]_0^L} - \int_0^L (EIw'')' v' \, dx \\ - \cancel{[Nw' v]_0^L} + \int_0^L (Nw') v' \, dx - \int_0^L \rho A \Omega^2 w v \, dx = 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_0^L \rho A \ddot{w} v \, dx - \cancel{[EIw'' v]_0^L} + \int_0^L EIw'' v'' \, dx \\ + \int_0^L (Nw') v' \, dx - \int_0^L \rho A \Omega^2 w v \, dx = 0 \end{aligned} \quad (3.85)$$

Die zusätzlichen Terme der partiellen Integration werden wegen den Randbedingungen zu Null. Die natürlichen Randbedingungen für den eingespannt-freien Balken $M(L, t) = 0$, $Q(L, t) = 0$ sind also in dieser Darstellung bereits enthalten und müssen nicht mehr separat aufgeführt werden. Die essentiellen Randbedingungen $w(0, t) = 0$, $w'(0, t) = 0$ müssen hingegen weiterhin explizit erzwungen werden [19, S. 10], da diese in der gegebenen schwachen Form lediglich durch die Testfunktion v erfüllt werden.

Nun soll eine geeignete Näherung für $w(x, t)$ und $v(x)$ gefunden werden. Mit einem vollständigen Funktionensystem aus beliebigen linear unabhängigen Funktionen $\phi_k(x)$ und zu bestimmenden Koeffizienten $w_k(t)$ kann eine Funktion $w(x, t)$ geschrieben werden als [11, S. 406]:

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) \phi_k(x) \quad (3.86)$$

Wird die Summe bei p abgebrochen so erhält man eine Näherung der Ordnung p :

$$w(x, t) \approx \tilde{w}(x, t) = \sum_{k=1}^p w_k(t) \phi_k(x) \quad (3.87)$$

Es muss darauf geachtet werden Ansatzfunktionen $\phi_k(x)$ zu verwenden, die alle Stetigkeitsanforderungen und Randbedingungen des formulierten Problems erfüllen. Während eine Differentialgleichung 4. Ordnung $\phi_k(x) \in C^3$ fordert, also drei mal stetig differenzierbare Funktionen, müssen für die schwache Form der Gl. (3.85) die Ansatzfunktionen nur $\phi_k(x) \in C^1$ sein. C^n bezeichnet die Menge der n -mal stetig differenzierbaren Funktionen. Die Stetigkeitsanforderungen sind also bei der schwachen Form wesentlich geringer. Außerdem müssen die Näherungen nur die essentiellen Randbedingungen erfüllen. Beim Galerkin-Verfahren werden für die Näherungen \tilde{w} und \tilde{v} die selben Ansatzfunktionen ϕ_k verwendet. Eingesetzt in die schwache Form der Gl. (3.85) ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \rho A \sum_{j=1}^p \ddot{w}_j \phi_j \sum_{i=1}^p v_i \phi_i \, dx + \int_0^L EI \sum_{j=1}^p w_j \phi_j'' \sum_{i=1}^p v_i \phi_i'' \, dx \\ & + \int_0^L \left(N \sum_{j=1}^p w_j \phi_j' \right) \sum_{i=1}^p v_i \phi_i' \, dx - \int_0^L \rho A \Omega^2 \sum_{j=1}^p w_j \phi_j \sum_{i=1}^p v_i \phi_i \, dx = 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \sum_{i=1}^p v_i \left[\sum_{j=1}^p \int_0^L \rho A \phi_j \phi_i \, dx \ddot{w}_j + \sum_{j=1}^p \int_0^L EI \phi_j'' \phi_i'' \, dx w_j \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^p \int_0^L (N \phi_j') \phi_i' \, dx w_j - \sum_{j=1}^p \int_0^L \rho A \Omega^2 \phi_j \phi_i \, dx w_j \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.89)$$

Da die Testfunktion $v(x)$ und somit die Koeffizienten v_i beliebig sind, muss der geklammerte Ausdruck verschwinden. So entstehen p Gleichungen, für jedes v_i eine. Das Gleichungssystem kann in Matrixnotation geschrieben werden:

$$\mathbf{M} \ddot{\underline{w}} + \mathbf{K}^{ip} \underline{w} = 0 \quad (3.90)$$

wobei die Summen über j im Matrizenprodukt enthalten sind. Die Elemente des Vektors der Verschiebungen \underline{w} sind durch die Koeffizienten w_j gegeben. Für Matrizen wird ein hochgestelltes ip oder op für in-plane bzw. out-of-plane Größen verwendet. Die Elemente der Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{K}^{ip} berechnen sich zu:

- Elemente der Massenmatrix \mathbf{M}

$$M_{ij} = \int_0^L \rho A \phi_j \phi_i \, dx \quad (3.91)$$

- Elemente der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{ip}

$$K_{ij}^{ip} = K_{ij}^s + K_{ij}^N - K_{ij}^d \quad (3.92)$$

Struktursteifigkeit:
$$K_{ij}^s = \int_0^L EI \phi_j'' \phi_i'' \, dx \quad (3.93)$$

Fliehkraftversteifung:
$$K_{ij}^N = \int_0^L N \phi_j' \phi_i' \, dx \stackrel{!}{=} \Omega^2 M_{ij}^N \quad (3.94)$$

Erweichung durch Fliehkraftdivergenz:
$$K_{ij}^d = \int_0^L \rho A \Omega^2 \phi_j \phi_i \, dx = \Omega^2 M_{ij} \quad (3.95)$$

Da $K_{ij}^N \sim N \sim \Omega^2$ gilt, können die Elemente dieser Matrix als $\Omega^2 M_{ij}^N$ geschrieben werden. Die neue Größe M_{ij}^N wurde dabei mit einem „ M “ bezeichnet, da sie die Einheit einer Masse besitzt. Sie erfasst die Proportionalität zwischen „Versteifung“ und Ω^2 . Der erweichende Anteil durch die Fliehkraftdivergenz ist über die tatsächliche Massenmatrix M_{ij} proportional zu Ω^2 . Beide Effekte rühren aus der Fliehkraft her. Daher ist es verständlich, dass auch beide mit Ω^2 eingehen, da dies auch für die Fliehkraft gilt.

Für *out-of-plane* Schwingungen ist keine Fliehkraftdivergenz vorhanden. Somit ist $\mathbf{K}^d = \mathbf{0}$ und es gilt:

$$\mathbf{K}^{op} = \mathbf{K}^s + \mathbf{K}^N \quad (3.96)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{K}^{ip} = \mathbf{K}^{op} - \Omega^2 \mathbf{M}} \quad (3.97)$$

Hiermit ist eine Beziehung zwischen der Steifigkeitsmatrix der *out-of-plane* Schwingungen und der *in-plane* Schwingungen gefunden worden. Zu diesem Ergebnis kommen auch Yoo und Shin [13]. In [18] und [21] wurde dieses Ergebnis auch für die Finite-Elemente-Methode erhalten.

3.4.2. Finite Elemente Methode für das mechanische Feld

Ziel ist es, die Eigenfrequenzen eines rotierenden Balkens mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode zu bestimmen. Im Folgenden sollen die theoretischen Grundlagen hierfür zusammengefasst werden, wie in [19] und [22] dargestellt.

Aus der linearen Kontinuumsmechanik ist die *Impulsbilanz* mit eingearbeiteter *Massenbilanz* und *Drehimpulsbilanz* bekannt [23]:

$$\operatorname{div} \sigma + \vec{f}_V = \rho \ddot{\vec{u}} \quad (3.98)$$

mit dem Cauchy-Spannungstensor σ , der Volumenkraft \vec{f}_V , Massendichte ρ und Verschiebungen $\vec{u}(\vec{x}, t)$.

Aus der Drehimpulsbilanz folgt ein symmetrischer Spannungstensor σ . Daher kann σ vereinfachend als 6×1 -Vektor in Voigt-Notation $\vec{\sigma}$ geschrieben werden und aus Gl. (3.98) wird:

$$\mathcal{B}^T \vec{\sigma} + \vec{f}_V = \rho \ddot{\vec{u}} \quad (3.99)$$

mit dem Differentialoperator für Voigt-Notation \mathcal{B} gegeben als [19, S. 37]:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix}^T \quad (3.100)$$

Das Konstitutivgesetz für lineare Elastizität ist das *Hookesche Gesetz*. In Voigt-Notation lautet dieses:

$$\vec{\sigma} = [c] \vec{S} \quad (3.101)$$

Für isotropes und lineares Materialverhalten werden lediglich zwei Parameter benötigt um die 6×6 -Matrix der mechanischen Moduli $[c]$ vollständig zu bestimmen. Diese können als Lamé Konstanten λ_L, μ_L gegeben sein. Im Kontext dieser Arbeit werden hierfür das Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl (Poisson-Zahl) ν verwendet. Für den vereinfachten Fall von *Plane Strain State* ist die Matrix der mechanischen Moduli in Gl. (3.117) gegeben. Siehe hierzu Abschnitt 3.4.2.

Die Dehnungen \vec{S} bestimmen sich aus der Kinematik mit den Verschiebungen \vec{u} :

$$\vec{S} = \mathcal{B} \vec{u} \quad (3.102)$$

Wird nun Gl. (3.102) in Gl. (3.101) eingesetzt und die resultierende Gleichung wiederum in die Bilanzgleichung aus Gl. (3.99), so erhält man die zu lösende partielle Differentialgleichung (PDE ¹) für das mechanische Feld, die sogenannte *Naviersche Gleichung*:

$$\mathcal{B}^T [c] \mathcal{B} \vec{u} + \vec{f}_V = \rho \ddot{\vec{u}} \quad (3.103)$$

Hinzu treten die *Randbedingungen* für den Rand $\Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_n$ des zu simulierenden Körpers \mathbb{B} :

- Dirichlet-Randbedingung:

$$\vec{u} = \vec{u}_e \quad \text{auf dem Rand } \Gamma_e \text{ und } \forall t \quad (3.104)$$

- Neumann-Randbedingung:

$$\sigma^T \vec{n} = \vec{\sigma}_n \quad \text{auf dem Rand } \Gamma_n \text{ und } \forall t \quad (3.105)$$

mit \vec{n} als Normalenvektor von Γ .

Eventuell werden noch die *Anfangsbedingungen* benötigt, wobei dies jedoch nicht für eine Eigenfrequenzanalyse der Fall ist:

$$\vec{u}(\vec{r}, 0) = \vec{u}_0, \vec{r} \in \mathbb{B} \quad (3.106)$$

$$\dot{\vec{u}}(\vec{r}, 0) = \dot{\vec{u}}_0, \vec{r} \in \mathbb{B} \quad (3.107)$$

¹Aus dem Englischen: „partial differential equation“

Die Naviersche Gleichung Gl. (3.103) wird nun wie beim Galerkin-Verfahren in die „schwache Form“ überführt, wodurch eine PDE erster Ordnung entsteht. Anschließend muss eine räumliche und eventuell zeitliche Diskretisierung durchgeführt werden um auf diese Weise ein algebraisches Gleichungssystem zu erhalten, das numerisch gelöst werden kann.

Da in diesem Abschnitt gezeigt werden soll wie die Diskretisierung zustande kommt, wird im Folgenden vereinfachend $\vec{u}_e = 0$ und $\vec{\sigma}_n = 0$ gesetzt. Würden die Randbedingungen berücksichtigt werden, so träten die Neumann-Randbedingungen in der schwachen Form als weitere Terme auf. Die Dirichlet-Randbedingungen hingegen müssen weiterhin explizit erzwungen werden [19, S. 10].

Um die *schwache Form* zu erhalten wird die PDE zuerst mit einer Testfunktion \vec{v} multipliziert und anschließend über die Simulationsdomäne \mathbb{B} integriert [19, S. 8]. Für die Testfunktion gilt $\vec{v} = 0$ auf Γ_e , ansonsten ist sie beliebig. Wird abschließend noch eine partielle Integration durchgeführt, so erhält man die *schwache Form*:

$$\int_{\mathbb{B}} \rho \vec{v} \cdot \ddot{\vec{u}} \, d\mathbb{B} + \int_{\mathbb{B}} (\mathcal{B}\vec{v})^T [c] \mathcal{B}\vec{u} \, d\mathbb{B} = \int_{\mathbb{B}} \vec{v} \cdot \vec{f}_V \, d\mathbb{B} \quad \text{mit} \quad \vec{u} = \vec{u}_e \text{ für } \Gamma_e \text{ und } \forall t \quad (3.108)$$

Die räumliche Diskretisierung wird vorgenommen indem die physikalische Größe $\vec{u}(\vec{x}, t)$ und die Testfunktion $\vec{v}(\vec{x})$ mit einem Galerkin-Verfahren approximiert werden. Um eine Diskretisierung zu erhalten werden jedoch Ansatzfunktionen $\phi_k(\vec{x})$ gewählt, die nur im Bereich eines *Elementes* verschieden Null sind. Jede Komponente der Vektoren soll mit denselben Ansatzfunktionen approximiert werden. Die Näherungen lauten:

$$\vec{v} \approx \sum_i \phi_i(\vec{x}) \vec{v}_i(t) \quad (3.109)$$

$$\vec{u} \approx \sum_j \phi_j(\vec{x}) \vec{u}_j(t) \quad (3.110)$$

Das Einsetzen der Näherungen aus Gln. (3.109 - 3.110) in die schwache Form der Gl. (3.108) ergibt die *Galerkin-Diskretisierung*, welche diskret in den räumlichen Koordinaten, aber kontinuierlich in der Zeit ist:

$$\mathbf{M}\ddot{\underline{u}} + \mathbf{K}\underline{u} = \underline{f} \quad (3.111)$$

wobei \underline{u} und \underline{f} keine physikalischen Vektoren sind, sondern die Vektoren der diskreten Werte von \vec{u} , \vec{f} . Die Elemente der Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{K} und die der rechten Seite \underline{f} lassen sich folgendermaßen berechnen:

- Elemente der Massenmatrix

$$M_{ij} = \int_{\mathbb{B}} \rho \phi_i \phi_j \, d\mathbb{B} \quad (3.112)$$

- Elemente der Steifigkeitsmatrix

$$K_{ij} = \int_{\mathbb{B}} (\mathcal{B}\phi_i)^T [c] (\mathcal{B}\phi_j) \, d\mathbb{B} \quad (3.113)$$

- Elemente der rechten Seite (RHS)

$$f_i = \int_{\mathbb{B}} \phi_i \vec{f}_V(\vec{x}_i) \, d\mathbb{B} \quad (3.114)$$

Eigenfrequenzanalyse

Für die Eigenfrequenzanalyse wird das System ohne äußere Lasten betrachtet, d. h. es gilt $\vec{f}_V = \vec{0}$. Außerdem kann in die Galerkin-Diskretisierung (Gl. (3.111)) ein harmonischer Ansatz für die Verschiebung $\underline{u} = \hat{u} \sin(\omega t + \theta)$ eingesetzt werden. Auf diese Weise leitet sich mit der Einheitsmatrix \mathbf{I} das Eigenwertproblem ab:

$$\mathbf{K}\hat{u} - \omega^2\mathbf{M}\hat{u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{I})\hat{u} = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{M} \text{ invertierbar} \quad (3.115)$$

Die Lösung dieses Problems, sind die Eigenkreisfrequenzen ω_i und Eigenvektoren \hat{u}_i .

Plane Strain State

Soll statt eines dreidimensionalen Körpers zur Vereinfachung ein ebenes Problem in der x/y -Ebene simuliert werden, so müssen Annahmen zur vernachlässigten Dimension z getroffen werden. Hat der Körper \mathbb{B} ein sehr großes Maß in z -Richtung und ist die Belastung in jedem Querschnitt $z = \text{const}$ gleich, so wird von einem „Plane Strain State“ gesprochen. Für einen solchen Aufbau kann die Abhängigkeit der Verschiebungen u_x und u_y von der z -Koordinate vernachlässigt werden [19]:

$$s_{zz} = s_{zy} = s_{zx} = 0 \quad (3.116)$$

Nach Kaltenbacher [19, S. 43] lautet das *Hookesche Gesetz* für den linearen und isotropen Plane Strain State (für E und ν):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ 2s_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.117)$$

Auch dünne Strukturen (Plane Stress State) und rotationssymmetrische Strukturen können auf ein zweidimensionales Problem zurückgeführt werden. Dies ist jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht von Bedeutung.

4. Simulation

Durch analytische Betrachtungen in Kapitel 3 konnten prinzipielle Zusammenhänge zwischen der Eigenfrequenz eines rotierenden Biegebalkens und diversen Parametern beschrieben werden. Unter anderem wurden Versteifungseffekte und Erweichungseffekte bei rotierenden Balken beobachtet. Um den Verlauf der Biegeeigenfrequenz ω mit der Winkelgeschwindigkeit Ω zu erhalten soll eine Finite-Elemente-Simulation (FE-Simulation) durchgeführt werden. Hierzu müssen mehrere Schritte durchgeführt werden:

1. Modellieren der Geometrie (Simulationsdomäne \mathbb{B}) - Preprocessing
2. Formulieren des Problems, inklusive Randbedingungen, piezoelektrische Kopplung und etwaige Belastungen, sowie Beschreiben der Materialien
3. Iteratives Simulieren mit Variation von Parametern
4. Visualisieren und interpretieren der Ergebnisse - Post-Processing

Im Folgenden wird die Herangehensweise an diese Aufgaben beschrieben.

4.1. Modellierung der Geometrie

Zunächst muss das Lösungsgebiet \mathbb{B} modelliert werden. Zu simulieren ist lediglich der Balken, die Welle ist nicht relevant. Da die Bedingungen aus Abschnitt 3.4.2 bezüglich Geometrie und Belastung erfüllt sind, kann eine *Plane Strain State* Simulation durchgeführt werden. Dementsprechend wird eine zweidimensionale Geometrie modelliert, die der x/z -Ebene aus Abb. 2.1b entspricht.

Das geometrische Modell wird mit *ANSYS* erstellt. Eine zweidimensionale Geometrie in *ANSYS* besteht aus Punkten, Linien und Flächen. Es wurde ein Skript erstellt, das die gewünschte Geometrie erzeugt. Der Programmablaufplan zu diesem Skript ist in Abb. 4.1 schematisch dargestellt. Sowohl für den Balken als auch für die Masse wurden Parameter für die Länge und Dicke definiert. Außerdem wurde ein Parameter für die Position der Masse definiert. Hierdurch ist es möglich diese auf einfache Weise zu variieren und die Geometrie mit verschiedenen Maßen zu erzeugen. Dies ist insbesondere deshalb wichtig, weil dies in der Simulation automatisch geschehen soll. Bei der Erstellung des *ANSYS*-Skripts wurde speziell darauf geachtet, dass die Geometrie für einen möglichst weiten Wertebereich der Parameter richtig erzeugt wird.

Die Geometrie besteht aus drei Flächen und ist in Abb. 4.2 zu sehen. Die drei Flächen modellieren die obere und untere Balkenschicht, sowie die Endmasse. Da üblicherweise die Elektroden als dünne Schicht im μm -Bereich auf das piezoelektrische Material aufgetragen werden, ist der Einfluss auf das mechanische Verhalten der Gesamtstruktur klein.

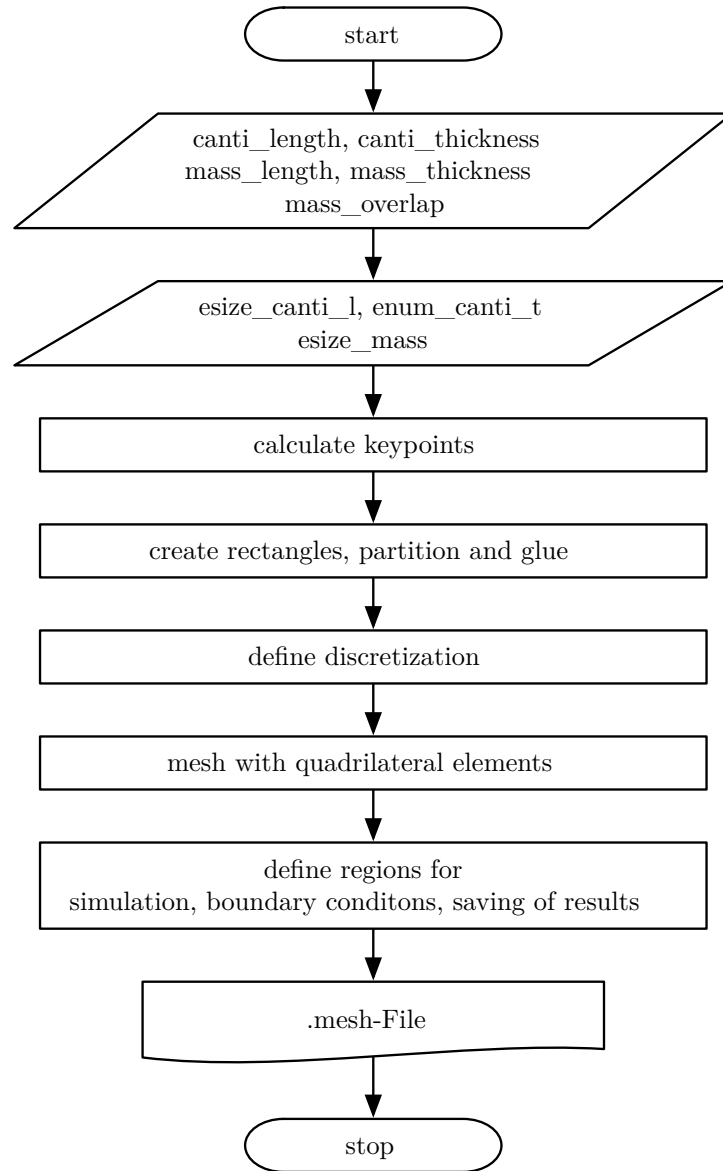


Abbildung 4.1.: Ablaufplan des *ANSYS*-Skripts zur Erzeugung der Geometrie der Simulationsdomäne \mathbb{B}

Aus diesem Grund wurden keine Elektroden in das geometrische Modell mit einbezogen. Jedoch werden sie als Randbedingungen bei der Simulation des elektrischen Feldes berücksichtigt.

Bei Biegung baut sich im Balken eine Normalspannung in x -Richtung auf. Diese ist linear über der Dicke des Balkens verteilt [10, S. 111]. Bei Biegung um die y -Achse gilt:

$$\sigma_b(z) = \frac{M}{I_{yy}}z \quad (4.1)$$

mit σ_b : Normalspannung aufgrund von Biegung, M : Biegemoment, I_{yy} : Flächenträgheitsmoment, z : Dickenkoordinate mit Nullpunkt bei $h/2$.

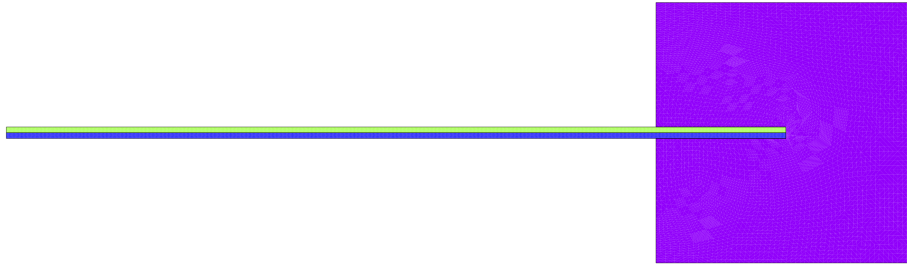


Abbildung 4.2.: Beispiel einer durch das *ANSYS*-Skript erzeugten Geometrie

Es ist ersichtlich, dass die Spannung σ_b symmetrisch über die Querschnittsfläche A des Balkens verteilt ist. In der Mitte des Balkens, also bei $z = 0$, ist die sogenannte neutrale Faser mit $\sigma_b = 0$. Die Spannungen in den beiden Schichten $z > 0$ und $z < 0$ haben umgekehrtes Vorzeichen, d. h. während in einer Hälfte des Balkens Zugspannung herrscht ist in der anderen Druckspannung vorhanden. Aufgrund dieser Symmetrie würde ein piezoelektrischer Biegebalken mit nur einer Schicht nach außen hin elektrisch völlig neutral auftreten. Damit sich eine elektrische Spannung U über den Elektroden des Piezoelements aufbaut, ist es nötig den Balken aus mindestens zwei Schichten aufzubauen. Diese müssen entweder gegensinnig polarisiert sein oder sinnvoll elektrisch verschalten werden (mit einer dritten Elektrode zwischen den beiden Schichten). Alternativ könnte auch ein Substrat mit einer piezoelektrischen Schicht versehen werden. Auch bei diesem Aufbau sind jedoch zwei oder mehr Schichten vorhanden.

Oberseite und Unterseite des Balkens müssen miteinander gefügt werden, z.B. durch Kleben. Eine Kleberschicht wurde in diesem Fall jedoch nicht modelliert. Genau wie bei den Elektroden wird der Einfluss auf das mechanische Verhalten als klein angesehen.

Anschließend wird die Geometrie durch das *ANSYS*-Skript diskretisiert. Die obere und untere Balkenschicht werden mit rechteckigen Elementen „regulär“ diskretisiert, der Bereich der Masse hingegen mit „nicht regulären“ Vierecken. Dies muss so erfolgen, da die Masse wesentlich gröber diskretisiert wird als der Balken. Da sich diese berühren und somit gemeinsame Knoten besitzen, könnte die Masse nur mit der gleichen Diskretisierungsgröße „regulär“ diskretisiert werden. Dies soll vermieden werden um kürzere Laufzeiten für die Simulation zu gewährleisten. Auch der Diskretisierungsgrad kann im Skript über entsprechende Parameter eingestellt werden. Die durch Diskretisierung der Geometrie aus Abb. 4.2 resultierenden Elemente sind in Abb. 4.3 dargestellt.

Es wurden quadratische Ansatzfunktionen für die Elemente gewählt. Dies resultiert in einem höheren Simulationsaufwand gegenüber linearen Ansatzfunktionen. Die Lösung konvergiert jedoch schneller bezüglich der Anzahl der Elemente. Außerdem wird hierdurch der sogenannte „Locking“-Effekt [19, S. 58] vermieden. Dieser verursacht eine durch die Diskretisierung unerwünschte Versteifung des Systems.

Zum Schluss werden im *ANSYS*-Skript die Elemente und Knoten in eine *mesh-Datei* geschrieben, welche der Simulationsumgebung *CFS++* als Eingabe dient. Auch benannte Gruppen an Knoten und Elementen werden in dieser Datei gespeichert. Die Gruppen dienen in *CFS++* um Randbedingungen zu definieren und um Simulationsergebnisse

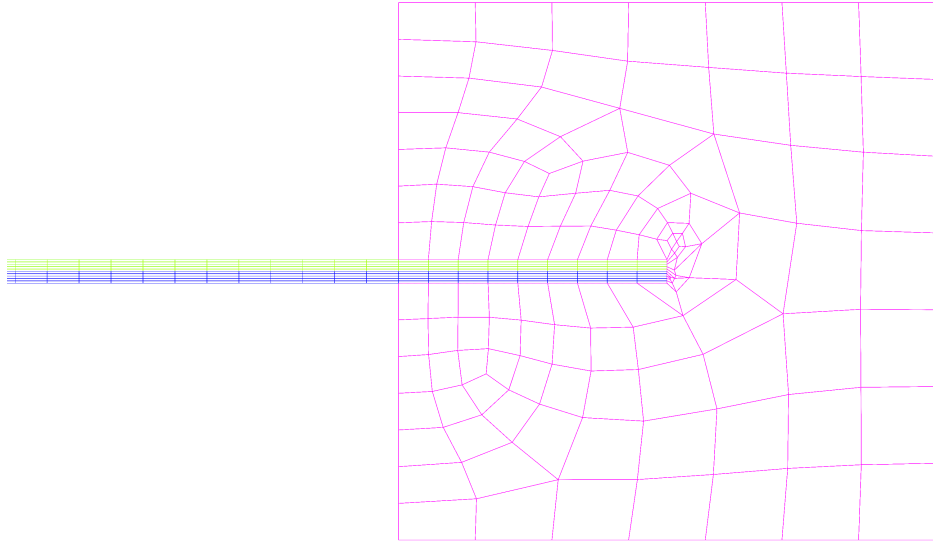


Abbildung 4.3.: Ausschnitt aus dem „Mesh“ der Simulationsdomäne \mathbb{B}

spezifischer Gebiete zu speichern.

4.2. Erstellen des linearen Gleichungssystems

Zur Simulation soll der Finite-Elemente-Löser *CFS++* (Coupled Field Simulation in C++) [24] eingesetzt werden. Die Software wird unter anderem vom Lehrstuhl für Sensorik entwickelt. Sie ist auf das Lösen von gekoppelten Feldproblemen ausgelegt, auch von piezoelektrisch gekoppelten Feldern.

CFS++ erhält drei Eingabedateien: die Parameter-Datei, Material-Datei und mesh-Datei. Letztere wurde mit dem beschriebenen *ANSYS*-Skript aus Abschnitt 4.1 bereits erstellt und beschreibt die Geometrie des zu simulierenden Aufbaus.

Die *Material-Datei* enthält Parameter die das Material charakterisieren, wie *Massendichte* ρ und Parameter der konstitutiven Gleichungen. Für das *Hookesche Gesetz* ist das beispielsweise der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν , bzw. für das elektrische Verhalten des Materials der Tensor der *Permittivität*. Das piezoelektrische Verhalten wird über die *piezoelektrischen Kraftkonstanten* $[e]$ nach Abschnitt 3.1.1 beschrieben. Für diese Simulation wurden Material-Parameter für PVDF und Stahl bereitgestellt, wobei das PVDF polarisiert, und daher piezoelektrisch aktiv ist. Die Werte der Parameter sind in Tabelle 5.1 angegeben.

Des Weiteren wird die *CFS++*-Parameter-Datei benötigt. Hierbei handelt es sich um eine Datei im XML-Format, in welcher die Simulation beschrieben wird. Unter anderem muss hier angegeben werden welche partielle Differentialgleichungen (PDEs) in den einzelnen Gebieten der Geometrie gelöst werden sollen. Auch die Randbedingungen der PDEs müssen formuliert werden. Etwaige Belastungen und piezoelektrische Kopplungen werden angegeben. Zudem wird festgelegt welche Ergebnisse der Simulation gespeichert werden und welche Analyseart durchgeführt wird (statisch, transient, harmonisch oder

Eigenfrequenzen).

Da eine Parameterstudie durchgeführt werden soll, werden in der *CFS++*-Parameter-Datei alle relevanten Parameter definiert. Dies sind die Drehzahl n und der Abstand zur Drehachse r_0 , sowie einige Hilfsvariablen für die Berechnung der Belastungen. Die Parameter werden später durch ein *MATLAB*-Skript gesetzt um iterative Simulationen durchzuführen.

Mit den beschriebenen Dateien als Eingabe kann *CFS++* selbstständig das als Näherung zu betrachtende lineare Gleichungssystem erzeugen. Hierzu geht die Software im Prinzip vor wie in Abschnitt 3.4.2 beschrieben. Jedoch ergibt sich eine Herausforderung für Simulationen in einem rotierenden Koordinatensystem, da *CFS++* stets von einem Inertialsystem bei der Erstellung des linearen Gleichungssystems ausgeht. Dies bedeutet, dass Effekte durch Rotation, wie Zentrifugalkräfte und Corioliskräfte, zusätzlich berücksichtigt werden müssen.

Die Simulation besteht aus zwei Schritten, in *CFS++* „sequenceSteps“ genannt. In der *ersten Phase* wird die mechanische Spannung und Verformung des Balkens aufgrund der Fliehkraft berechnet. Dies stellt den „Arbeitspunkt“ dar, um den eine lineare Simulation durchgeführt wird. Das Ergebnis dieses Schrittes ist die Normalspannung im Balken und wurde bereits im Abschnitt 3.3.7 diskutiert. Der Verlauf der Normalspannung $\sigma_N(x)$ entlang der Dickenkoordinate $h \approx 0$ ist in Abb. 3.5 zu sehen. In Abb. 4.4 ist außerdem das vollständige Ergebnis in den zwei Dimensionen graphisch dargestellt.

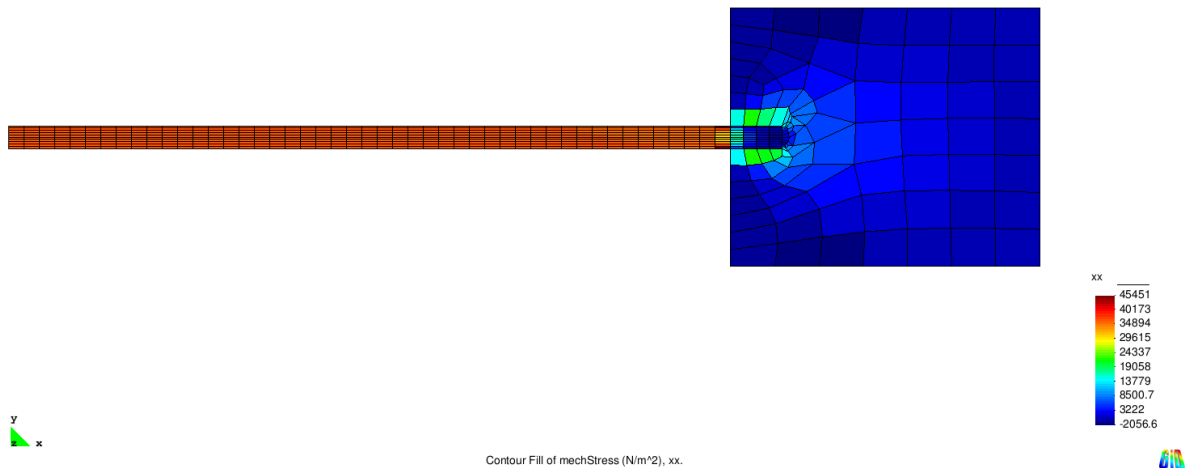


Abbildung 4.4.: Normalspannung $\sigma_N(x, y)/\text{Pa}$ im Balken aufgrund der Fliehkraft - Skala von $-2,0 \text{ kPa}$ bis $45,5 \text{ kPa}$. Parameter: $\Omega = 2 \pi 10 \text{ rad s}^{-1}$, $r_0 = 0 \text{ m}$

Im *zweiten Simulationsschritt* wird die Eigenfrequenzanalyse im Arbeitspunkt durchgeführt, d. h. unter Berücksichtigung der mechanischen Spannungen aus der ersten Phase.

In *CFS++* kann ein sogenannter „Prestress“, also Vorspannung, beachtet werden. Dies wird verwendet um die Auswirkung der mechanischen Spannung aus dem ersten Simulationsschritt einzubeziehen. Das geschieht indem die Steifigkeitsmatrix K neu berechnet wird, so dass diese die Versteifung durch die Spannungen wiedergibt. Hierdurch fließt der versteifende Term aus Gl. (3.47) in die FE-Simulation ein. Dieser Term tritt sowohl in der Bewegungsdifferentialgleichung der *out-of-plane*, als auch der *in-plane* Schwingungen des Biegebalkens auf (Gln. (3.45)-(3.46)). Aus dem durch *CFS++* so erstellten linearen Gleichungssystem kann ein Eigenwertproblem generiert werden, das anschließend gelöst werden kann. Hierdurch erhält man die Eigenwerte des *out-of-plane* rotierenden Balkens. Der zusätzlich erweichende Term der bei *in-plane* Schwingungen des Balkens auftritt (Gl. (3.46)), kann nicht auf gleiche Weise berücksichtigt werden. Dies liegt daran, dass bei einer linearen Simulation, wie hier durchgeführt, lediglich die Volumenkräfte f_V (nach Gl. (3.98)) der *undeformierten* Geometrie berücksichtigt werden [19, S. 52]. Die Fliehkraftdivergenz tritt aber gerade wegen der Verschiebung w_z in z -Richtung auf und somit nur in der deformierten Geometrie.

Insbesondere die *in-plane* Schwingungen sind für die Untersuchung des Harvesters von Bedeutung. Um diese zu analysieren, muss der Einfluss des erweichenden Divergenzanteils auf die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} berücksichtigt werden. Da *CFS++* für diese spezielle Aufgabe derzeit keine Möglichkeit bietet, wird das durch *CFS++* erstellte Gleichungssystem exportiert, um anschließend das Problem mit *MATLAB* zu lösen. Das Vorgehen hierzu ist im nächsten Abschnitt erklärt.

4.3. Iterative Simulation und Visualisierung

Zur Simulation von *in-plane* Schwingungen wird in *MATLAB* die Massenmatrix \mathbf{M} und die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{op} eingelesen und anschließend die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{ip} nach Gl. (3.97) berechnet:

$$\mathbf{K}^{ip} = \mathbf{K}^{op} - \Omega^2 \mathbf{M} \quad (3.97)$$

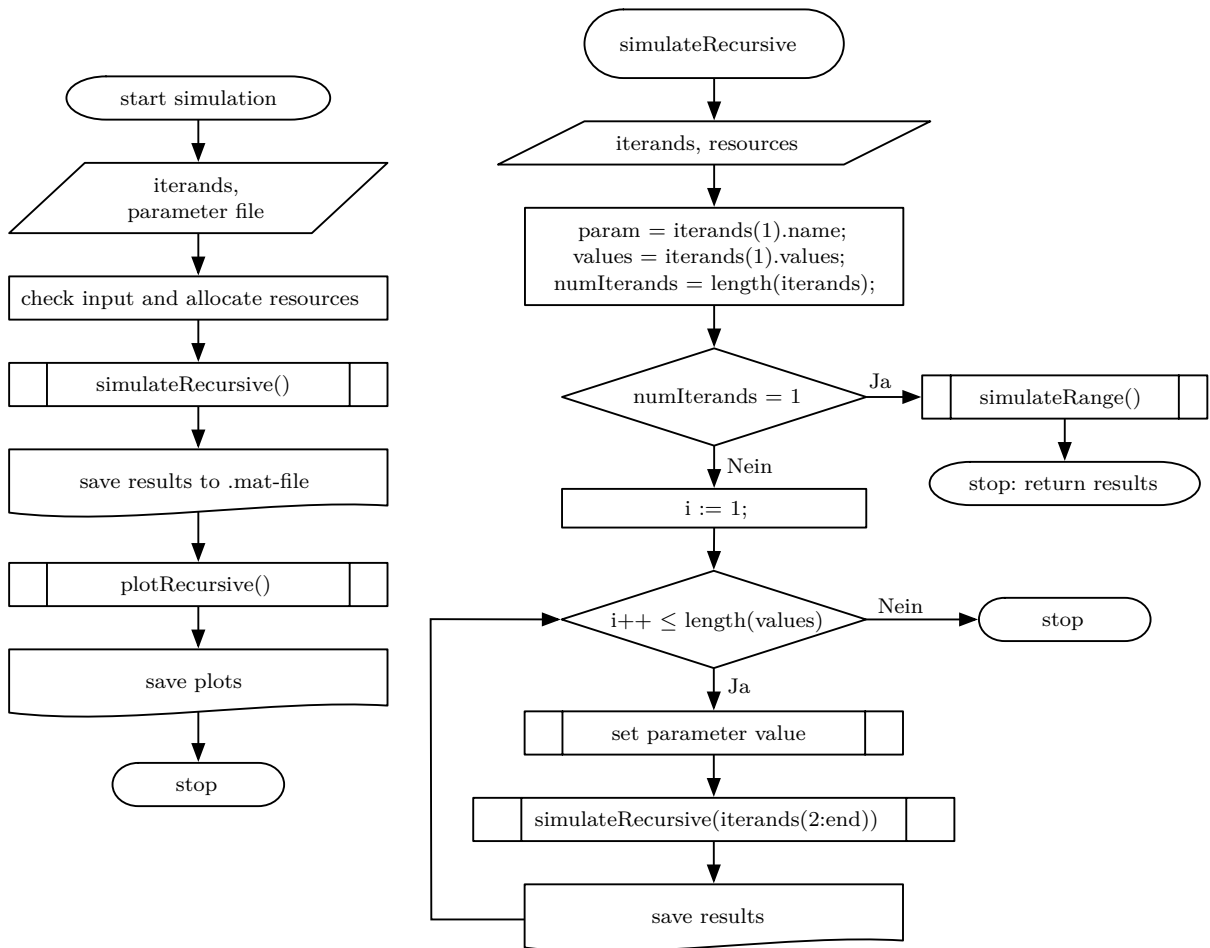
Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass bei diesem Vorgehen die Steifigkeit *aller Moden* herabgesetzt wird. Dies entspricht nicht dem physikalischen Verhalten des Balkens. Da jedoch nur die erste Biegeeigenkreisfrequenz ω_1 um die y -Achse ohne Kopplung mit anderen Moden untersucht wird und weitere Moden nicht betrachtet werden, stellt dies keine Einschränkung dar.

Nach Aufstellen der Steifigkeitsmatrix werden mit *MATLAB* die Eigenfrequenzen berechnet indem das Eigenwertproblem aus Gl. (3.115) gelöst wird.

$$\left(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}^{ip} - \omega^2 \mathbf{I} \right) \hat{\underline{u}} = 0 \quad (3.115)$$

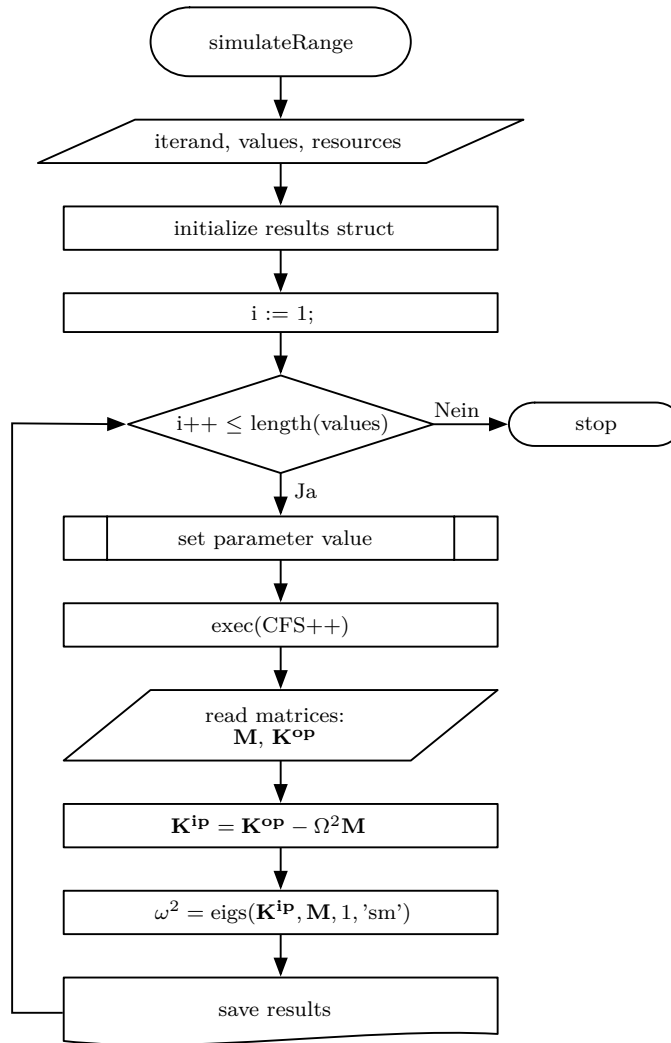
Dies wird mit der von *MATLAB* zur Verfügung gestellten Methode *eigs()* durchgeführt. *CFS++* wird also bei der Simulation von *in-plane* Schwingungen lediglich zur Berechnung des Arbeitspunktes und zur Erstellung des linearen Gleichungssystems der *out-of-plane* Schwingungen verwendet.

MATLAB wird außerdem eingesetzt, um iterative Simulationen mit Parametervariation durchzuführen. Auch die Visualisierung der Ergebnisse erfolgt hiermit, indem Kurvenscharen geplottet werden.

Abbildung 4.5.: Ablaufplan des *MATLAB*-Simulationsskripts.

Das entwickelte *MATLAB*-Skript erhält als Eingabe einen Vektor mit „Iterand“-Objekten. Ein solches Objekt stellt einen zu variierenden Parameter dar und besitzt als Attribute den Parameternamen, zu iterierende Werte und Einheit. Um die Parameterstudie möglichst flexibel zu machen, sollen mit nur einer Simulation beliebig viele Parameter variierbar sein. Das Skript berechnet deshalb rekursiv die Biegeeigenfrequenz des Balkens für alle Parameterkombinationen des „Iterand“-Vektors und stellt die Ergebnisse anschließend in Diagrammen dar.

Auf der Ordinate des Diagramms wird die berechnete Biegeeigenfrequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ aufgetragen, der letzte Parameter des „Iterands“-Vektors ist auf der Abszisse aufgetragen und als Parameter für die Kurvenschar wird gegebenenfalls der vorletzte Parameter des Vektors verwendet. Sind weitere Parameter vorhanden, so entstehen mehrere Diagramme. Der vereinfachte Programmablaufplan ist in Abb. 4.5 zu sehen. Die eigentliche Simulation wird von der Funktion `simulateRange()` durchgeführt. Diese übernimmt außerdem die Aufgabe, den letzten Parameter, üblicherweise die Drehzahl n , zu iterieren. Der Programmablaufplan hierzu ist in Abb. 4.6 dargestellt.

Abbildung 4.6.: Programmablaufplan von *simulateRange()*

4.4. Vergleich mit Ergebnissen aus der Literatur

Um die Simulationsergebnisse zu überprüfen, wird zunächst die erhaltene Eigenfrequenz des nicht rotierenden Balkens mit dem entsprechenden Ergebnis für einen Euler-Bernoulli-Balken (s. 3.2) verglichen. Für die FE-Simulation wurde die Poisson-Zahl zu Null gesetzt, da Querkontraktion beim analytischen Modell auch nicht berücksichtigt wird. Die Wahl der Parameter ist in Tabelle 4.1 angegeben. Die Breite b des Balkens ist unerheblich. Anhand der Simulation ergibt sich für diese Parameter eine Eigenkreisfrequenz von $\omega_{CFS++} = 114,613 \text{ s}^{-1}$.

Der Wert $\kappa_1 L$ wurde aus der charakteristischen Gleichung (Gl. (3.78)) numerisch bestimmt und beträgt $\kappa_1 L = 0,7358$. Hiermit ergibt sich aus Gl. (3.79):

$$\omega_{\text{analytisch}} = (\kappa_1 L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} = 115,184 \text{ s}^{-1} \quad (3.79)$$

Die relative Abweichung beträgt 0,5%. Demnach zeigen die Ergebnisse der Simulation

Tabelle 4.1.: Parameter für den Vergleich der Eigenfrequenz eines Euler-Bernoulli-Balkens und der FE-Simulation

Bezeichnung	Formelzeichen	Wert
Länge	L	15 mm
Dicke	h	0,22 mm
Massenverhältnis	ϵ	10
Dichte	ρ	1760 kg m ⁻³
E-Modul	E	1000 MPa
Poisson-Zahl	ν	0

und des analytischen Modells für den nicht rotierenden Balken gute Übereinstimmung. Abweichungen können sich ergeben, da in der FE-Simulation mit *CFS++* statt einer konzentrierten Masse ein Volumen aus Stahl modelliert wird. Außerdem werden die Annahmen des Euler-Bernoulli-Balkens der Schubstarrheit und vernachlässigbarer Rotationsträgheit nicht getroffen. Zudem wurde piezoelektrische Kopplung modelliert, aber der piezoelektrische Balken elektrisch offen betrieben.

Für den rotierenden Balken werden die Ergebnisse der Finite-Elemente-Simulation durch Vergleich mit [13, Tabelle 3] überprüft. In dieser Tabelle sind normierte Eigenkreisfrequenzen für verschiedene Winkelgeschwindigkeiten Ω und Abstände zur Drehachse r_0 angegeben. Dabei ist keine Masse am freien Ende des Balkens vorhanden. Alle Angaben zu Eigenfrequenzen und Winkelgeschwindigkeiten sind auf die „charakteristische Frequenz“ F normiert. Diese beträgt für den simulierten Balken mit Länge $L = 25$ mm und alle weiteren Parametern aus Tabelle 4.1:

$$F = \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} = 76,6 \text{ Hz} \quad (4.2)$$

Um die Daten zu vergleichen wird die Normierung rückgängig gemacht und die relative Abweichung der Eigenfrequenzen berechnet. Yoo und Shin berücksichtigen keine Querkontraktion. Aus diesem Grund wurde auch für diesen Vergleich die *Poisson-Zahl* der Materialien zu Null gesetzt. Die sich ergebenden relativen Abweichungen sind in Abb. 4.7 dargestellt.

Die größte relative Abweichung beträgt 0,73 %. Somit stimmen die Ergebnisse auch für den rotierenden Fall gut überein. Unterschiede können sich ergeben, da verschiedene Modelle verwendet wurden. Während Yoo und Shin [13] ein Einparametermodell mit Galerkin-Näherungsverfahren einsetzen, wird in dieser Arbeit ein Zweiparametermodell (Plane Strain) mit Finite-Elemente-Methode verwendet. In der Tabelle von Yoo und Shin sind außerdem nur drei signifikante Stellen für die Eigenfrequenzen angegeben.

In der Simulation soll *Querkontraktion* berücksichtigt werden, wodurch sich tendenziell höhere Eigenfrequenzen ergeben. Der zugehörige Vergleich mit [13, Tabelle 3] ist in Abb. 4.8 zu sehen.

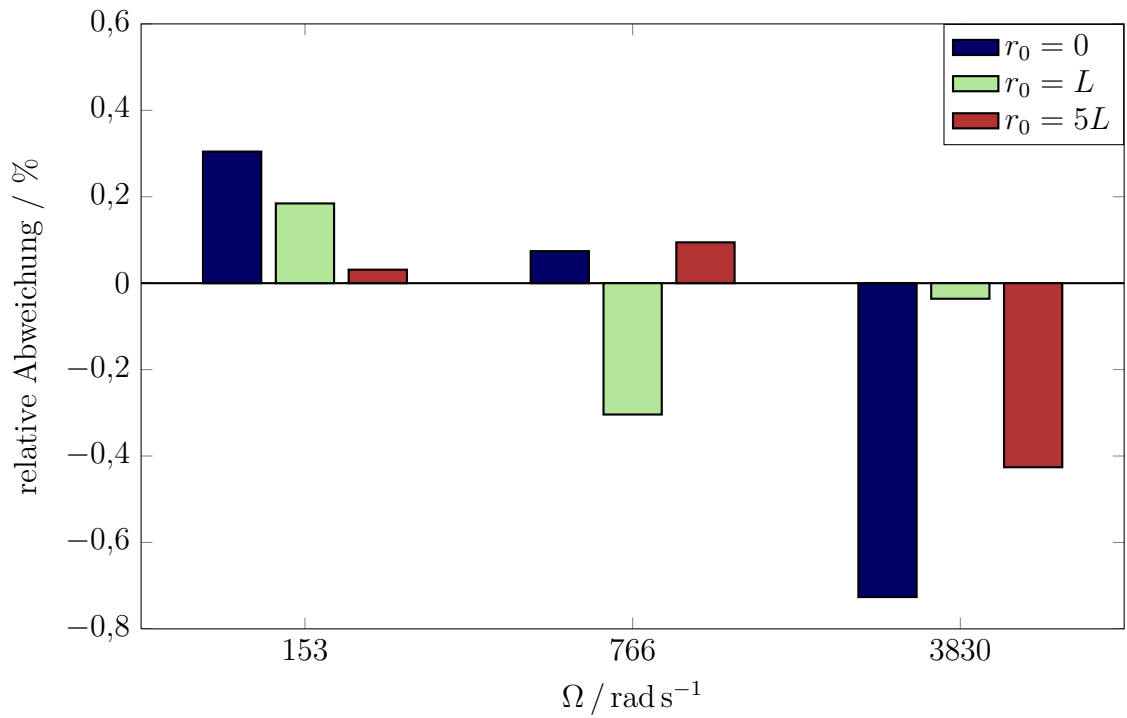
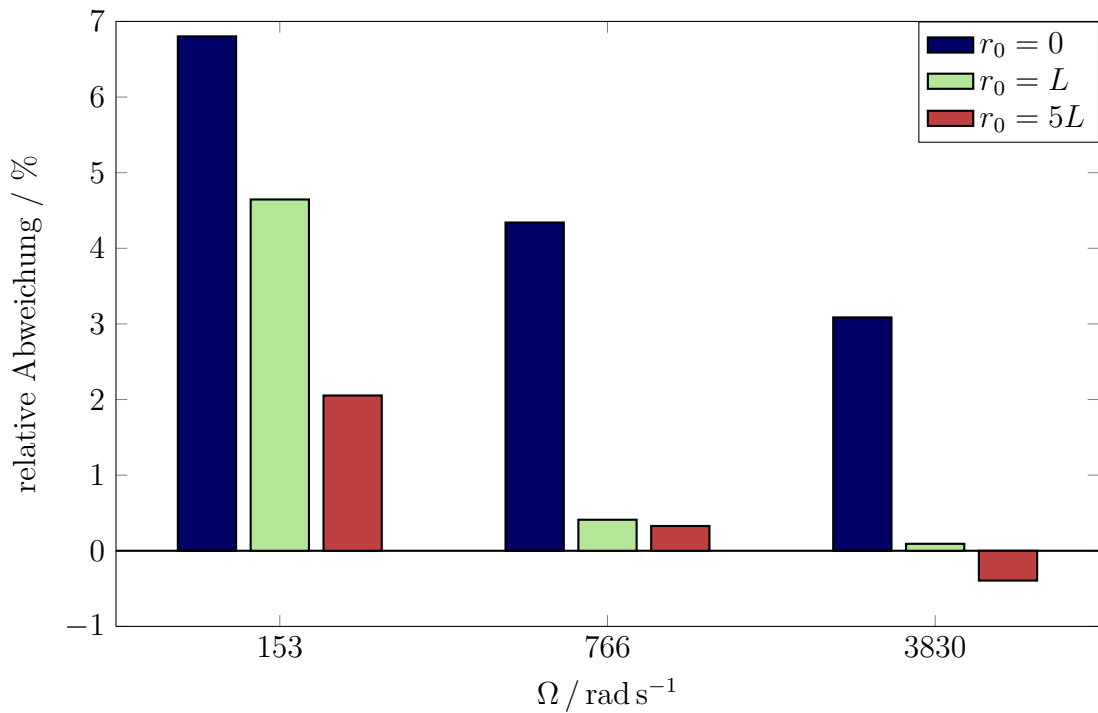


Abbildung 4.7.: Relative Abweichung (%) der Simulationsergebnisse zu [13, Tabelle 3]

Abbildung 4.8.: Relative Abweichung (%) der Simulationsergebnisse mit *Querkontraktion* zu [13, Tabelle 3]

5. Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt werden die Simulationsergebnisse der Parameteranalyse präsentiert. Die zu variierenden geometrischen Parameter sind die Länge des Balkens L , das Massenverhältnis $\epsilon = \frac{m}{\rho AL}$, das über das Volumen der Endmasse eingestellt wird, und der auf die Länge normierte Abstand zur Rotationsachse $\delta = \frac{r_0}{L}$. Die erste Biegeeigenfrequenz wird in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit Ω betrachtet. Die gepunktete Linie in den ω/Ω -Diagrammen stellt die Idealkurve $\omega = \Omega$ dar und kann als Referenz betrachtet werden.

Die Dicke des Biegebalkens beträgt $h = 0,22$ mm. Der Schwerpunkt der Endmasse fällt mit der Balkenspitze zusammen. Der Balken besteht aus PVDF, die Masse aus Stahl. Die verwendeten Materialparameter sind in Tabelle 5.1 angegeben. Eine piezoelektrische Kopplung wurde zwar modelliert, die Elektroden werden aber elektrisch offen betrieben.

Tabelle 5.1.: Verwendete Materialparameter für Stahl und PVDF

Stahl		
Dichte	ρ	7850 kg m ⁻³
Elastizitätsmodul	E	200 GPa
Poisson-Zahl	ν	0,29
PVDF		
Dichte	ρ	1760 kg m ⁻³
Elastizitätsmodul	E	1 GPa
Poisson-Zahl	ν	0,34
Permittivität	ϵ	$8,8542 \cdot 10^{-11}$ A s V ⁻¹ m ⁻¹
piezoelektrische Kraftkonstante, longitudinal	e_{33}	$32,603 \cdot 10^{-3}$ C m ⁻²
piezoelektrische Kraftkonstante, transversal	e_{31}	$-25,886 \cdot 10^{-3}$ C m ⁻²
piezoelektrische Kraftkonstante, Schereffekt	e_{15}	0 C m ⁻²

Im Diagramm der Abb. 5.1 sind *out-of-plane* und *in-plane* Schwingungen gegenübergestellt, sowohl für ein Massenverhältnis $\epsilon = 0$ als auch $\epsilon = 10$. Der Abstand zur Rotationsachse beträgt $\delta = 0$. Es ist erkennbar, dass die Steigung der in-plane Eigenfrequenzen aufgrund der Erweichung durch die Fliehkraftdivergenz wesentlich geringer ist als die der out-of-plane Schwingungen. Im Gegensatz zu den out-of-plane Schwingungen kann für die in-plane Eigenfrequenzen auch für kleine Massenverhältnisse eine *Resonanzstelle* $\omega_{ip} = \Omega_r$ gefunden werden. Bedingt durch den Aufbau des Energy-Harvesters sind für diese Arbeit nur in-plane Schwingungen relevant. Im Weiteren werden deshalb lediglich diese Eigenfrequenzen untersucht.

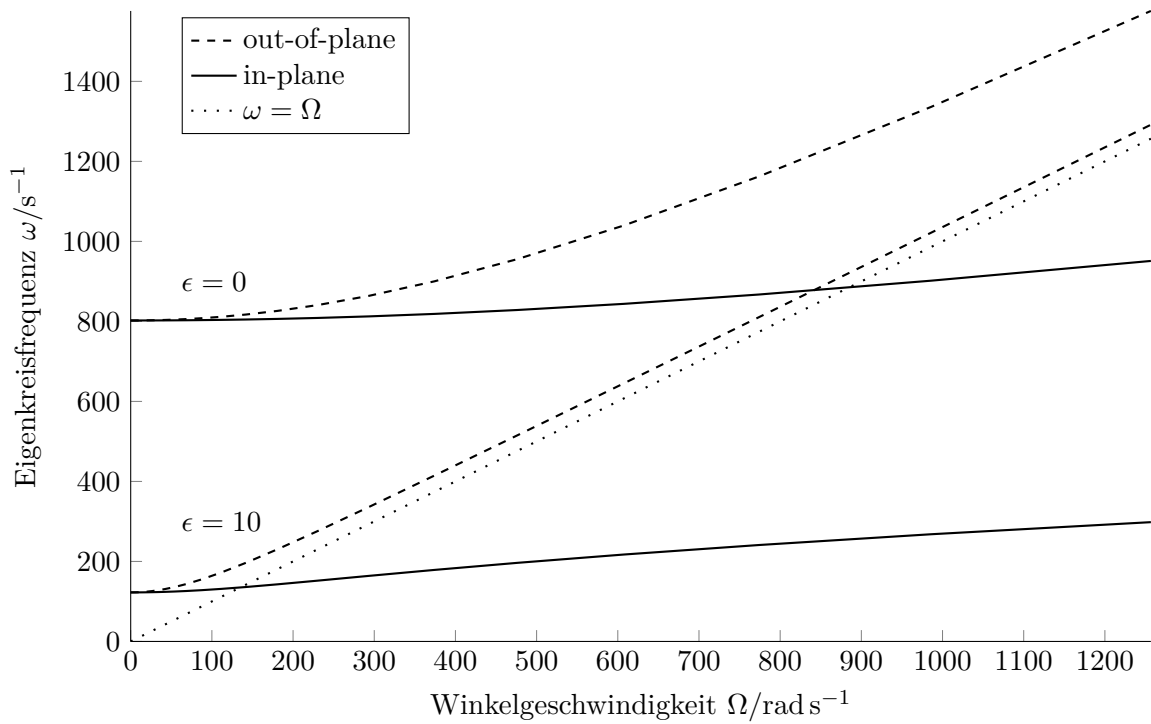


Abbildung 5.1.: Out-of-plane und in-plane Eigenkreisfrequenzen $\omega(\Omega)$ für $L = 15$ mm, $\delta = 0$

Abbildung 5.2 zeigt wie sich die in-plane Eigenfrequenzkurven mit dem Massenverhältnis ϵ ändern. Hierbei wurde ein Abstand zur Rotationsachse von $\delta = 0,5$ gewählt. Die Eigenfrequenz des nicht rotierenden Balkens ω_0 nimmt näherungsweise hyperbolisch ab, wie in Abschnitt 3.3.8 beschrieben. Die asymptotische Steigung λ der Kurven ändert sich jedoch kaum mit dem Massenverhältnis, obwohl die Normalkraft N im Balken aufgrund größerer Fliehkräfte ansteigt. Dies liegt daran, dass sowohl die Masse \mathbf{M} als auch die dynamische Steifigkeit \mathbf{K} zunehmen (letztere wegen der Normalkraft N).

Ein ähnliches Verhalten der ω/Ω -Kurvenscharen lässt sich durch Variation der Balkenlänge L beobachten, siehe hierzu Abb. 5.3. Die Eigenfrequenz des nicht rotierenden Balkens ω_0 nimmt mit der Länge L ab, da der Eigenwert $\kappa(\epsilon, L)$ abnimmt. Auch hier ergibt sich kaum eine Änderung der asymptotischen Steigung λ . Wie bei Variation des Massenverhältnisses ϵ nimmt sowohl die Masse \mathbf{M} als auch die dynamische Steifigkeit \mathbf{K} zu. Bei konstantem Massenverhältnis ϵ ergibt sich durch Variation der Länge eine proportionale Änderung der Masse. Ebenso resultiert aus $\delta = const.$ eine proportionale Änderung des Abstandes zur Rotationsachse $r_0 = \delta L$, wodurch die dynamische Steifigkeit \mathbf{K} trotz größerer Länge L zunimmt.

Die asymptotische Steigung λ der ω/Ω -Kurven ist maßgeblich durch den Abstand zur Rotationsachse δ bestimmt, wie in Abb. 5.4 zu sehen ist. Da die Fliehkräfte linear mit dem Abstand $r = \delta L + x$ zunehmen, nimmt auch die Normalkraft N im Balken und dessen Ableitung N' zu. Dies führt zu einer Erhöhung der dynamischen Steifigkeit \mathbf{K} , ohne dabei die Masse \mathbf{M} des Systems zu beeinflussen. Somit nehmen auch die Eigenfrequenzen zu. Abschließend sind in Abb. 5.5 Kurvenscharen mit verschiedenen Massenverhältnissen ϵ

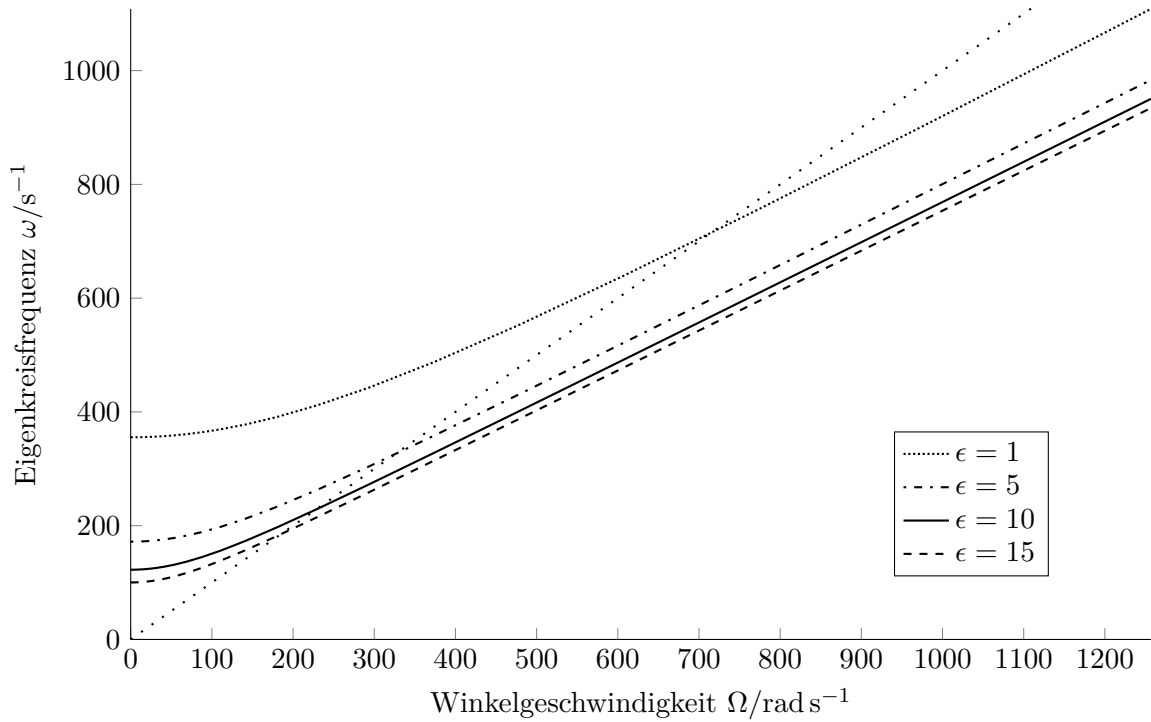


Abbildung 5.2.: Kurvenschar der Eigenkreisfrequenz $\omega(\Omega)$ für das Massenverhältnis ϵ mit $L = 15$ mm, $\delta = 0,5$

und $\delta = 0$ über einem wesentlich größeren Bereich der Winkelgeschwindigkeit Ω dargestellt. Es lässt sich ein Maximum der Eigenkreisfrequenzen ω beobachten. Anschließend fallen diese ab, bis sie bei der Knickgeschwindigkeit Ω_b zu Null werden. An dieser Stelle tritt Knicken auf.

Wie im Abschnitt 3.3.6 bereits erwähnt haben Yoo und Shin [13] ein ähnliches Verhalten für Balken ohne Endmasse dokumentiert. Allerdings trat der Effekt aufgrund von Kopplung der Biegeschwingungen mit den Längsschwingungen durch die Corioliskraft auf.

Die Corioliskraft wurde in dieser Simulation nicht berücksichtigt und somit auch nicht die entsprechende Kopplung zwischen Biegeschwingungen und Längsschwingungen. Da bei der Transformation der dynamischen Steifigkeitsmatrix für in-plane Schwingungen über $\mathbf{K}_{ip} = \mathbf{K}_{op} - \Omega^2 \mathbf{M}$ zwischen den Moden nicht differenziert wird, ist eine Berücksichtigung der Kopplung in dieser Simulation nicht ohne Weiteres möglich. Wie bereits in Abschnitt 3.3.2 erwähnt, ist die Vernachlässigung der Kopplung für kleine Winkelgeschwindigkeiten Ω bei hinreichend schlanken Balken möglich [13, S. 826].

Der in Abb. 5.5 beobachtete Effekt ist also nicht auf eine Modenkopplung zurückzuführen. Vielmehr ist dies durch die Endmasse m bedingt. Aufgrund dieser nähern sich die out-of-plane Biegeeigenfrequenzen an die Idealkurve $\omega = \Omega$ an. Für einen Balken ohne Endmasse kann keine Resonanzstelle für die out-of-plane Schwingungen gefunden werden, siehe hierzu Abschnitt 3.3.4. Wie die Simulation zeigt, ist dies jedoch für große Massenverhältnisse ϵ nicht mehr gegeben. Es sei angemerkt, dass für out-of-plane Schwingungen keine Kopplung durch die Corioliskraft (s. Gl. (3.37)) vorhanden ist. Somit ist

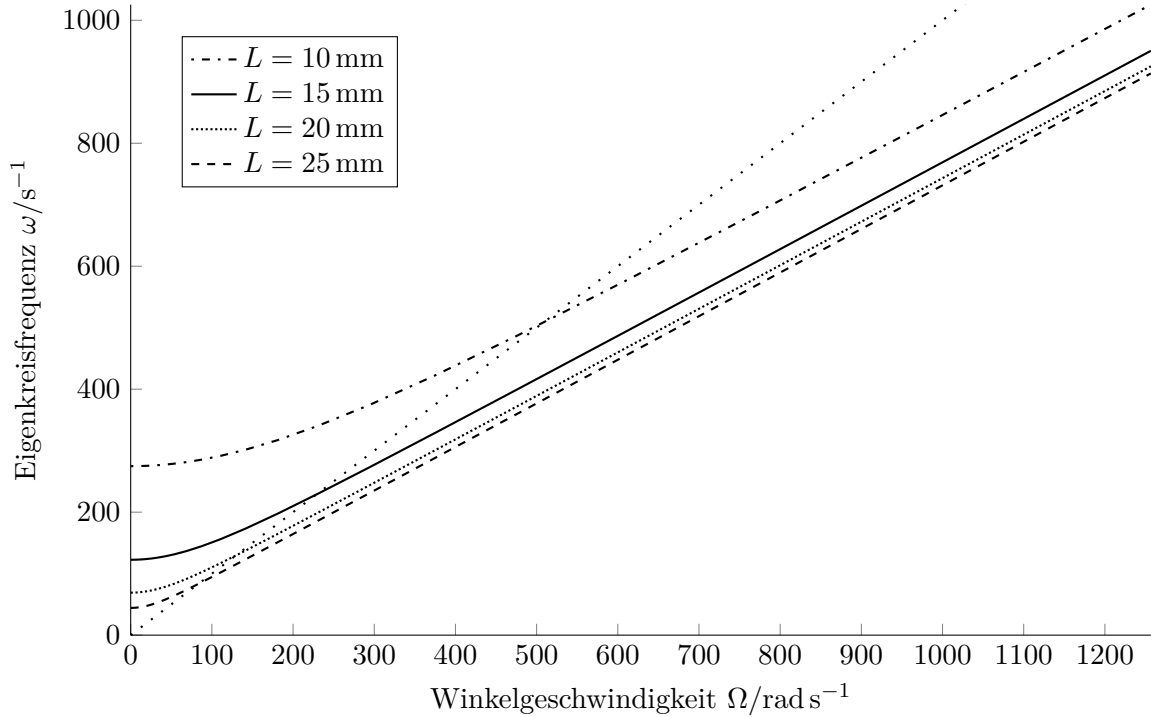


Abbildung 5.3.: Kurvenschar der Eigenkreisfrequenz $\omega(\Omega)$ für die Länge des Balkens L mit $\epsilon = 10$, $\delta = 0,5$

die erwähnte Vernachlässigung, die für in-plane Schwingungen vorgenommen wird, nicht relevant.

Der Zusammenhang zwischen out-of-plane und in-plane Biegeeigenfrequenzen, gültig für identische Biegesteifigkeit EI , ist bekannt:

$$\omega_{\text{ip}}^2 = \omega_{\text{op}}^2 - \Omega^2 \quad (3.50)$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{ip}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{\text{op}} = \Omega \quad (5.1)$$

Dies bedeutet, dass die Knickgeschwindigkeit Ω_b bei der Resonanzstelle der out-of-plane Schwingung auftritt. Die in-plane Eigenfrequenzen fallen aufgrund der Annäherung der out-of-plane Eigenfrequenzen an die Ideallinie ab, was wiederum durch die Endmasse bedingt ist.

Daran ist ersichtlich, dass ein Abfallen der in-plane Eigenfrequenzen nur für kleine Abstände zur Rotationsachse $r_0 = \delta L$ auftreten kann, denn mit r_0 nimmt die Steigung der out-of-plane Eigenfrequenzkurven zu. Das Diagramm aus Abb. 5.5 zeigt die Ergebnisse einer Simulation mit $r_0 = \delta = 0$. Schon geringfügig größere Werte reichen aus um eine asymptotische Steigung der out-of-plane Eigenfrequenzen größer als eins zu erhalten. Die in-plane Eigenfrequenzen nehmen dann entsprechend monoton mit der Winkelgeschwindigkeit zu.

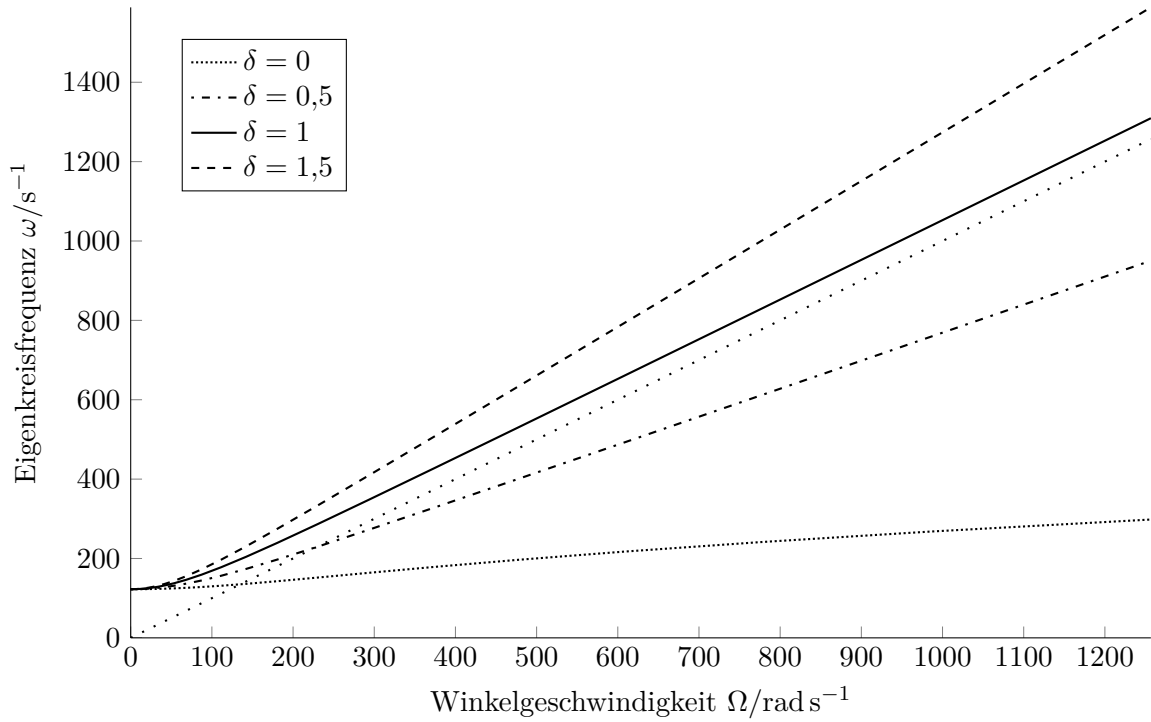


Abbildung 5.4.: Kurvenschar der Eigenkreisfrequenz $\omega(\Omega)$ für den normierten Abstand zur Rotationsachse δ mit $\epsilon = 10$, $L = 15$ mm

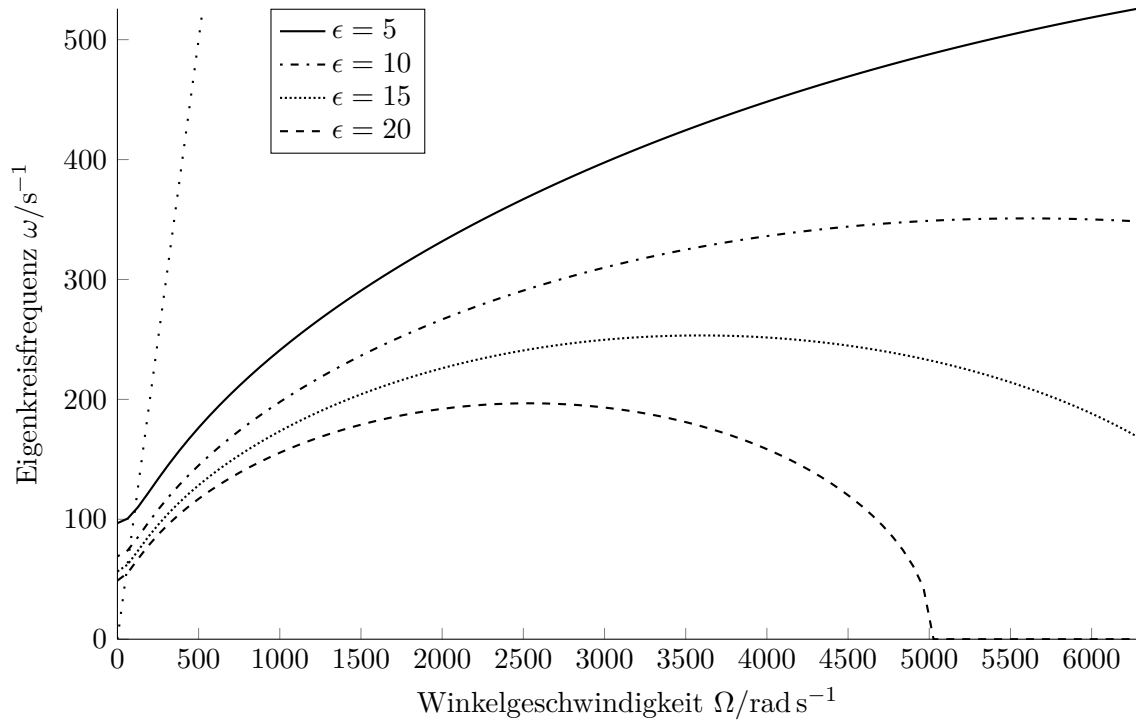


Abbildung 5.5.: Kurvenschar der Eigenkreisfrequenz $\omega(\Omega)$ für das Massenverhältnis ϵ mit $\delta = 0$, $L = 20$ mm

6. Zusammenfassung und Ausblick

6.1. Zusammenfassung

Die maximale elektrische Ausgangsleistung eines piezoelektrischen Vibrations-Energy-Harvesters stellt sich bei Betrieb in mechanischer Resonanz ein. Daher sollte für einen Harvester, der aus einem rotierenden Biegebalken besteht und mit seinem Eigengewicht zur Schwingung angeregt wird, die erste Biegeeigenfrequenz der Winkelgeschwindigkeit entsprechen.

Um zu untersuchen, ob ein solcher Betrieb in Resonanz mit der Winkelgeschwindigkeit möglich ist, wurden zunächst die Bewegungsdifferentialgleichungen für den Balken aufgestellt. Eine anschließende Näherung durch das Galerkin-Verfahren verdeutlicht die auftretenden Versteifungs- und Erweichungseffekte. Weiterhin eignet sich eine Darstellung in dieser Form zur Berücksichtigung der genannten Effekte in einer Simulation.

Anhand der gewonnenen Erkenntnisse konnte eine Finite-Elemente-Simulation in einem rotierenden Koordinatensystem durchgeführt werden, indem sowohl der versteifende Hauptanteil als auch der erweichende Divergenzanteil der Zentrifugalkraft berücksichtigt wurden. Die Ergebnisse für einen Balken ohne Endmasse wurden mit denen aus der Literatur verglichen und es konnte eine gute Übereinstimmung nachgewiesen werden.

Die Simulationsergebnisse zeigen, dass es für in-plane Schwingungen bei genügend kleinem Abstand zur Rotationsachse möglich ist, eine Resonanzstelle zu finden. Hingegen ist eine kleine Abweichung der Eigenfrequenz von der Winkelgeschwindigkeit über einen weiten Drehzahlbereich nur bedingt möglich. Die Winkelgeschwindigkeit muss hierzu deutlich größer sein als die erste Biegeeigenfrequenz des nicht rotierenden Balkens.

Die asymptotische Steigung der Eigenfrequenzkurve ist über den Abstand zur Drehachse sehr gut einstellbar. Idealerweise beträgt die Steigung für alle Winkelgeschwindigkeiten eins. Aufgrund der Struktursteifigkeit sind die Eigenfrequenzen dann aber stets größer als die Winkelgeschwindigkeiten. Deshalb muss eine geringfügig kleinere Steigung gewählt werden, um eine Resonanzstelle zu erhalten. Je näher dabei die asymptotische Steigung an der idealen ist, desto geringer wird die Abweichung der Eigenfrequenz von der Winkelgeschwindigkeit über einen weiten Drehzahlbereich sein.

Die Eigenfrequenz des nicht rotierenden Balkens sollte möglichst klein gewählt werden. Allerdings ist zu beachten, dass mit einer kleineren Eigenfrequenz gleichzeitig die Schwingungsamplitude bei Anregung durch das Eigengewicht zunimmt. Dies liegt daran, dass eine Verringerung der Eigenfrequenz mit einer geringeren Ersatzfederkonstante des Biegebalkens oder einer größeren Masse und somit Gewichtskraft einhergeht.

Abschließend kann gesagt werden, dass der vorgeschlagene Energy-Harvester für hohe Drehzahlen das erwünschte Verhalten aufweist. Die mechanische Beanspruchung ist jedoch entsprechend hoch. Ein Einsatzgebiet könnten rotierende Maschinen (Pumpen, Kompressoren, etc.) der Industrie sein. Beispielsweise werden aufgrund bestehender Si-

cherheitsbestimmungen in der chemischen Industrie spezielle Lösungen zur Energieversorgung von Sensoren gesucht, die an Pumpen zur Störungsfrüherkennung eingesetzt werden [25, S. 2]. Wegen der geringen Drehzahl von Automobilrädern und deren hohen Dynamik ist ein Einsatz in Reifendrucküberwachungssystemen schwierig.

6.2. Ausblick

In dieser Arbeit wurden lediglich Eigenfrequenzen analysiert. Um eine Aussage zur Bandbreite des Energy-Harvesters treffen zu können, müssten harmonische Untersuchungen durchgeführt werden. Dies könnte durch Ergänzung der erstellten Simulationen auf einfache Weise geschehen. Allerdings ist, bedingt durch die Aufgabenstellung einer möglichst geringen Eigenfrequenz des nicht rotierenden Balkens, die Durchbiegung in Resonanz groß, weshalb zumindest teilweise eine nichtlineare Simulation nötig ist.

Des Weiteren sollte eine genauere Untersuchung bezüglich der Einhaltung der maximalen Belastbarkeit durchgeführt werden. Bisher wurde lediglich die Normalspannung im Balken aufgrund der Fliehkraft als maßgebende Belastung betrachtet. Diese überlagert sich aber mit der Normalspannung durch Biegung. Außerdem sollten Kerbwirkungen einbezogen werden.

Durch Vernachlässigung der Struktursteifigkeit steht eine einfache Möglichkeit zur Verfügung, im Rahmen der Simulation die asymptotische Steigung der Eigenfrequenzkurve zu berechnen. Dies könnte genutzt werden, um eine numerische Optimierung durchzuführen. Da die Steigung der Eigenfrequenzkurve annähernd beliebig eingestellt werden kann, besteht die wichtigste Aufgabe darin, einen Aufbau mit möglichst geringer Struktursteifigkeit zu entwerfen. Um dies zu erreichen, könnte anstelle eines Balkens ein Seil mit piezoelektrischen Fasern verwendet werden.

Literaturverzeichnis

- [1] FISCHERAUER, Gerhard ; STÖBER, Ralf: Wireless Sensor Networks: Status and Trends. In: *Proceedings SENSOR 2009, Volume II* (2009), S. 11–16
- [2] ROUNDY, Shad: Energy harvesting for tire pressure monitoring systems: design considerations. In: *Technical Digest PowerMEMS 2008 (Sendai, Japan 9-12 November 2008)* (2008), S. 1–6
- [3] WANG, Yu-Jen ; CHEN, Chung-De ; SUNG, Cheng-Kuo: Design of a frequency-adjusting device for harvesting energy from a rotating wheel. In: *Sensors and Actuators A: Physical* 159 (2010), Mai, Nr. 2, S. 196–203. – ISSN 0924–4247
- [4] GU, Lei ; LIVERMORE, Carol: Compact passively self-tuning energy harvesting for rotating applications. In: *Smart Materials and Structures* 21 (2012), Januar, Nr. 1, S. 015002. – ISSN 0964–1726
- [5] LERCH, Reinhard: *Sensorik*. Erlangen, Germany, 2012
- [6] SESSLER, G. M.: Piezoelectricity in polyvinylidene fluoride. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 70 (1981), Nr. 6, S. 1596–1608
- [7] LERCH, Reinhard: *Sensoren und Aktoren der Mechatronik*. Erlangen, Germany, 2011
- [8] ROUNDY, Shad ; LELAND, Eli S. ; BAKER, Jessy ; CARLETON, Eric ; REILLY, Elizabeth ; LAI, Elaine ; OTIS, Brian ; RABAEY, Jan M. ; WRIGHT, Paul K. ; SUNDARARAJAN, V.: Improving power output for vibration-based energy scavengers. In: *Pervasive Computing, IEEE* 4 (2005), Nr. 1, S. 28–36. – ISSN 15361268
- [9] SHU, Y.C. ; LIEN, I.C.: Efficiency of energy conversion for a piezoelectric power harvesting system. In: *Journal of Micromechanics and Microengineering* 16 (2006), Nr. 11, S. 2429–2438. – ISSN 09601317
- [10] GROSS, Dietmar ; HAUGER, Werner ; SCHRÖDER, Jörg ; WALL, Wolfgang A.: *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. 11., bearb. Aufl. 2012. Springer, 2011. – ISBN 3642199836
- [11] GROSS, Dietmar ; HAUGER, Werner ; WRIGGERS, Peter: *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. 8. Aufl. 2012. Springer, 2011. – ISBN 3642168272
- [12] WAUER, Jörg: *Kontinuumschwingungen: vom einfachen Strukturmodell zum komplexen Mehrfeldsystem*. Wiesbaden : Vieweg + Teubner, 2008. – ISBN 9783835102200 3835102206 9783835192393 3835192396

- [13] YOO, H. H. ; SHIN, S. H.: Vibration analysis of rotating cantilever beams. In: *Journal of Sound and Vibration* 212 (1998), Nr. 5, S. 807–828
- [14] EICHHORN, C. ; GOLDSCHMIDTBOEING, F. ; WOIAS, P.: Bidirectional frequency tuning of a piezoelectric energy converter based on a cantilever beam. In: *Journal of Micromechanics and Microengineering* 19 (2009), September, Nr. 9, S. 094006. – ISSN 0960–1317
- [15] HU, Yuantai ; XUE, Huan ; HU, Hongping: A piezoelectric power harvester with adjustable frequency through axial preloads. In: *Smart Materials and Structures* 16 (2007), Oktober, Nr. 5, S. 1961. – ISSN 0964–1726
- [16] BAZOUNE, A.: Relationship between softening and stiffening effects in terms of Southwell coefficients. In: *Journal of Sound and Vibration* 287 (2005), November, Nr. 4–5, S. 1027–1030. – ISSN 0022–460X
- [17] YOO, H. H. ; SEO, S. ; HUH, K.: The effect of a concentrated mass on the modal characteristics of a rotating cantilever beam. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 216 (2002), Februar, Nr. 2, S. 151–163. – ISSN 0954–4062, 2041–2983
- [18] HOA, S.V.: Vibration of a rotating beam with tip mass. In: *Journal of Sound and Vibration* 67 (1979), Dezember, Nr. 3, S. 369–381. – ISSN 0022–460X
- [19] KALTENBACHER, Manfred: *Numerical Simulation of Mechatronic Sensors and Actuators*. 1. Berlin; New York : Springer, 2004. – ISBN 354020458X 9783540204589
- [20] REDDY, J. N.: *An introduction to the finite element method*. 3. Boston : McGraw-Hill, 2006. – ISBN 0071244735 9780071244732 0072466855 9780072466850 0071267611 9780071267618
- [21] PUTTER, S. ; MANOR, H.: Natural frequencies of radial rotating beams. In: *Journal of Sound and Vibration* 56 (1978), Januar, Nr. 2, S. 175–185. – ISSN 0022–460X
- [22] SUTOR, Alexander ; VOLK, Adrian: *Computer Aided Engineering of Sensors and Actuators WS 11/12*. Erlangen, Germany, 2011
- [23] STEINMANN, P.: *Linear continuum mechanics*. Erlangen, Germany, 2011
- [24] KALTENBACHER, M.: Advanced simulation tool for the design of sensors and actuators. In: *Procedia Engineering* 5 (2010), S. 597–600. – ISSN 1877–7058
- [25] ALBACH, Thorsten: *Realisierung energieautarker, funkbasierter Sensormodule durch Umgebungsenergieerückgewinnung auf Piezobasis*. Erlangen, Germany, April 2006

Abbildungsverzeichnis

2.1.	Prinzipieller Aufbau: Die Welle mit Radius r_0 rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\Omega = \dot{\varphi}$. Am piezoelektrischen Biegebalken der Länge L und Dicke h ist eine Endmasse m angebracht. Das (x, y, z) -Koordinatensystem ist balkenfest und rotiert somit. (x^*, y^*, z^*) ist ein Inertialsystem.	3
3.1.	Eingespannt-freier Balken	9
3.2.	Skizze des deformierten Balkens im Zentrifugalbeschleunigungsfeld. Eingezeichnete Kräfte für die Spitze des Balkens: Z : Zentrifugalkraft, Z_x : Hauptanteil der Zentrifugalkraft, Z_z : Divergenzanteil der Zentrifugalkraft. . . .	15
3.3.	Eingespannt-freier Balken mit abschnittsweise konstanten Parametern . .	19
3.4.	Normalkraft $N(x)$ in einem rotierenden Balken der Breite $b = 5$ mm, Geometrie nach Abb. 3.3, $\lambda_m = 0,7$, Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 2\pi 10$ rad s ⁻¹	20
3.5.	Normalspannung $\sigma_N(x)$ im rotierenden Balken, Geometrie nach Abb. 3.3, $\lambda_m = 0,7$, Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 2\pi 10$ rad s ⁻¹ . In der Simulation beginnt die Masse bei $\xi = 0,7$ und der PVDF-Balken endet bei $\xi = 0,75$	21
3.6.	Eingespannt-freier Balken mit konzentrierter Masse m an der Spitze. . .	22
3.7.	Numerische Lösung für κ_L^2 in Abhängigkeit von ϵ eines einseitig eingespannten Biegebalkens mit Endmassenverhältnis ϵ	24
4.1.	Ablaufplan des <i>ANSYS</i> -Skripts zur Erzeugung der Geometrie der Simulationsdomäne \mathbb{B}	32
4.2.	Beispiel einer durch das <i>ANSYS</i> -Skript erzeugten Geometrie	33
4.3.	Ausschnitt aus dem „Mesh“ der Simulationsdomäne \mathbb{B}	34
4.4.	Normalspannung $\sigma_N(x, y)$ /Pa im Balken aufgrund der Fliehkraft - Skala von $-2,0$ kPa bis $45,5$ kPa. Parameter: $\Omega = 2\pi 10$ rad s ⁻¹ , $r_0 = 0$ m	35
4.5.	Ablaufplan des <i>MATLAB</i> -Simulationsskripts.	37
4.6.	Programmablaufplan von <i>simulateRange()</i>	38
4.7.	Relative Abweichung (%) der Simulationsergebnisse zu [13, Tabelle 3] . .	40
4.8.	Relative Abweichung (%) der Simulationsergebnisse mit <i>Querkontraktion</i> zu [13, Tabelle 3]	40
5.1.	Out-of-plane und in-plane Eigenkreisfrequenzen $\omega(\Omega)$ für $L = 15$ mm, $\delta = 0$	42
5.2.	Kurvenschar der Eigenkreisfrequenz $\omega(\Omega)$ für das Massenverhältnis ϵ mit $L = 15$ mm, $\delta = 0,5$	43
5.3.	Kurvenschar der Eigenkreisfrequenz $\omega(\Omega)$ für die Länge des Balkens L mit $\epsilon = 10$, $\delta = 0,5$	44
5.4.	Kurvenschar der Eigenkreisfrequenz $\omega(\Omega)$ für den normierten Abstand zur Rotationsachse δ mit $\epsilon = 10$, $L = 15$ mm	45

5.5. Kurvenschar der Eigenkreisfrequenz $\omega(\Omega)$ für das Massenverhältnis ϵ mit $\delta = 0, L = 20 \text{ mm}$	45
--	----

Tabellenverzeichnis

3.1. Materialparameter für PVDF	7
4.1. Parameter für den Vergleich der Eigenfrequenz eines Euler-Bernoulli-Balkens und der FE-Simulation	39
5.1. Verwendete Materialparameter für Stahl und PVDF	41



PIEZOTECH S.A.S. Polymères pyro- et piézoélectriques
 9, rue de Colmar - 68220 HÉSINGUE – France
 Tél. +33 (0)3 89 67 00 46 – Fax: +33 (0)3 89 67 50 43
 Email: info@piezotech.fr - Web: www.piezotech.fr

P(VDF-TrFE) COPOLYMER 75/25 FILM – 110 µm (± 5%) THICKNESS TECHNICAL DATASHEET	
Piezo/Pyroelectric Properties (at 23°C)	
d ₃₃ (pC/N)	15 ± 20%
d ₃₁ (pC/N)	6 ± 20%
d ₃₂ (pC/N)	6 ± 20%
g ₃₃ (V.m/N) at 1kHz	0.18 ± 20%
p ₃ (µC/m ² K)	-19 ± 25%
Dielectric properties (at 23°C)	
ε _r	
- at 0.1 kHz,	9.6 ± 10%
- at 1 kHz,	9.4 ± 10%
- at 10 kHz,	9.2 ± 10%
tan δ	
- at 0.1 kHz,	0.015 ± 10%
- at 1 kHz,	0.016 ± 10%
- at 10 kHz,	0.032 ± 10%
Mechanical properties (at 23°C)	
Young's modulus (MPa)	
- machine direction,	1000 ± 20%
- transverse direction,	1200 ± 20%
Tensile strength at break (MPa)	
- machine direction,	40 ± 15%
- transverse direction,	30 ± 15%
Elongation at break (%)	
- machine direction,	400 ± 30%
- transverse direction,	450 ± 30%
Thermal properties (at 23°C)	
Melting point (°C)	150 ± 5%
Curie Temperature (°C)	135 ± 5%
Transverse direction	90 - 100